



การแยก ตัวประกอบพหุนาม

อ.กนกวลี อุษณกรกุล
โรงเรียนสายน้ำผึ้ง ในพระอุปถัมภ์ฯ

การแยกตัวประกอบโดยวิธีดึงตัวร่วมออก

เป็นการแยกตัวประกอบวิธีแรกสุดที่ต้องทำก่อนวิธีอื่น (ถ้าทำได้)

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ

$$6a^3b + 3a^2b^2 + 18ab^3$$

วิธีทำ $6a^3b + 3a^2b^2 + 18ab^3 = 3ab(2a^2 + ab + 6b^2)$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $(a-b)^3 + 2(a-b)^2$

วิธีทำ $(a-b)^3 + 2(a-b)^2 = (a-b)^2(a-b+2)$

การแยกตัวประกอบของพหุนาม 2 พจน์

1. การแยกตัวประกอบของผลต่างกำลังสอง

$$n^2 - l^2 = (n - l)(n + l)$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ $(x-y)^2 - (2x+3y)^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(x - y)^2 - (2x + 3y)^2 &= [(x-y) - (2x+3y)] [(x-y)+(2x+3y)] \\ &= (x-y-2x-3y) (x-y+2x+3y) \\ &= (-x-4y) (3x+2y) \\ &= -(x+4y) (3x+2y)\end{aligned}$$

รายการที่ 7 การแยกตัวประกอบพหุนาม

2. การแยกตัวประกอบของผลบวกกำลังสาม

$$n^3 + l^3 = (n + l)(n^2 - nl + l^2)$$

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ $250p^3 + 2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 250p^3 + 2 &= 2(125p^3 + 1) \\ &= 2[(5p)^3 + 1^3] \\ &= 2(5p + 1)[(5p)^2 - (5p)(1) + 1^2] \\ &= 2(5p + 1)(25p^2 - 5p + 1) \end{aligned}$$

3. การแยกตัวประกอบของผลต่างกำลังสาม

$$n^3 - l^3 = (n - l)(n^2 + nl + l^2)$$

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบของ $a^6 - 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} a^6 - 1 &= (a^2)^3 - 1^3 \\ &= (a^2 - 1)[(a^2)^2 + a^2(1) + 1^2] \\ &= (a^2 - 1)(a^4 + a^2 + 1) \\ &= (a - 1)(a + 1)(a^4 + a^2 + 1) \end{aligned}$$

สรุป

การแยกตัวประกอบของพหุนาม 2 พจน์ ทำได้โดย

1. ผลต่างกำลังสอง

$$n^2 - l^2 = (n - l)(n + l)$$

2. ผลบวกกำลังสาม

$$n^3 + l^3 = (n + l)(n^2 - nl + l^2)$$

3. ผลต่างกำลังสาม

$$n^3 - l^3 = (n - l)(n^2 + nl + l^2)$$

รายการที่ 7 การแยกตัวประกอบพหุนาม

การแยกตัวประกอบของพหุนาม 3 พจน์

1. การแยกตัวประกอบโดยแยกเป็น 2 วงเล็บ

ตัวอย่างที่ 6 จงแยกตัวประกอบของ $4x^2+19x-5$

วิธีทำ $4x^2+19x-5 = (4x-1)(x+5)$

ตัวอย่างที่ 7 จงแยกตัวประกอบของ x^6-7x^3-8

วิธีทำ

$$\begin{aligned}x^6-7x^3-8 &= (x^3-8)(x^3+1) \\ &= (x^3-2^3)(x^3+1^3) \\ &= (x-2)(x^2+2x+4)(x+1)(x^2-x+1)\end{aligned}$$

2. การแยกตัวประกอบที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$\text{หน้า}^2 + 2\text{หน้าหลัง} + \text{หลัง}^2 = (\text{หน้า} + \text{หลัง})^2$$

$$\text{หน้า}^2 - 2\text{หน้าหลัง} + \text{หลัง}^2 = (\text{หน้า} - \text{หลัง})^2$$

ตัวอย่างที่ 8 จงแยกตัวประกอบของ $9a^2-24ab+16b^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}9a^2-24ab+16b^2 &= (3a)^2-2(3a)(4b)+(4b)^2 \\ &= (3a-4b)^2\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 9 จงแยกตัวประกอบของ $4x^4+4x^2y^2+y^4$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}4x^4+4x^2y^2+y^4 &= (2x^2)^2+2(2x^2)y^2+(y^2)^2 \\ &= (2x^2+y^2)^2\end{aligned}$$

3. การแยกตัวประกอบ 3 พจน์ที่แยกเป็น 2 วงเล็บไม่ได้ ต้องเพิ่มพจน์กลางหรือเพิ่มพจน์ท้าย

ตัวอย่างที่ 10 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 4x - 3$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } x^2 + 4x - 3 &= (x^2 + 4x + 4) - 3 - 4 \\ &= (x + 2)^2 - 7 \\ &= (x + 2)^2 - (\sqrt{7})^2 \\ &= (x + 2 - \sqrt{7})(x + 2 + \sqrt{7}) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 11 จงแยกตัวประกอบของ $a^4 + a^2 + 1$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } a^4 + a^2 + 1 &= (a^4 + a^2 + a^2 + 1) - a^2 \\ &= (a^4 + 2a^2 + 1) - a^2 \\ &= (a^2 + 1)^2 - a^2 \\ &= (a^2 + 1 - a)(a^2 + 1 + a) \\ &= (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1) \end{aligned}$$

สรุป

การแยกตัวประกอบของพหุนาม 3 พจน์ ทำได้โดย

1. แยกเป็นสองวงเล็บ ข้อสังเกต : พจน์กลางต้องมีเลขชี้กำลังเป็นครึ่งหนึ่งของพจน์ต้นหรือพจน์ท้าย
2. ถ้าแยกเป็นสองวงเล็บไม่ได้ให้ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ โดยเพิ่มพจน์กลางหรือเพิ่มพจน์ท้าย

ข้อสังเกต : โจทย์เพิ่มพจน์กลางตัวแปร มีเลขชี้กำลังสูงสุด 4 หรือทวีคูณของ 4

$$\begin{aligned} &: \text{ โจทย์เพิ่มพจน์ท้าย ตัวแปร มีเลขชี้กำลังสูงสุด 2 โดยพจน์ท้าย} = \left(\frac{\text{สัมประสิทธิ์ของพจน์กลาง}}{2} \right)^2 \\ &\text{และสัมประสิทธิ์ของพจน์ } x^2 \text{ ต้องเท่ากับ 1} \end{aligned}$$

การแยกตัวประกอบของพหุนาม 4 พจน์

1. การแยกตัวประกอบโดยจับคู่กลุ่มละ 2 พจน์

ตัวอย่างที่ 12 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } x^3 + 3x^2 - 4x - 12 &= (x^3 + 3x^2) - (4x + 12) \\ &= x^2(x + 3) - 4(x + 3) \\ &= (x + 3)(x^2 - 4) \\ &= (x + 3)(x - 2)(x + 2) \end{aligned}$$

รายการที่ 7 การแยกตัวประกอบพหุนาม

2. การแยกตัวประกอบโดยจับกลุ่ม กลุ่มละ 3 พจน์ 1 พจน์

ตัวอย่างที่ 13 จงแยกตัวประกอบของ $9y^2 - 16c^2 - 16cd - 4d^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 9y^2 - 16c^2 - 16cd - 4d^2 &= 9y^2 - (16c^2 + 16cd + 4d^2) \\ &= (3y)^2 - (4c + 2d)^2 \\ &= [3y - (4c + 2d)] [3y + (4c + 2d)] \\ &= (3y - 4c - 2d) (3y + 4c + 2d) \end{aligned}$$

3. การแยกตัวประกอบโดยจับคู่กลุ่มที่สามารถแยกตัวประกอบได้ไว้ด้วยกันก่อน

ตัวอย่างที่ 14 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - y^3 - x^2y + xy^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - x^2y + xy^2 &= (x^3 - y^3) - (x^2y - xy^2) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) - xy(x - y) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2 - xy) \\ &= (x - y)(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

สรุป

การแยกตัวประกอบของพหุนาม 4 พจน์ ทำได้โดย

1. การแยกตัวประกอบโดยจับคู่กลุ่มละ 2 พจน์
2. การแยกตัวประกอบโดยจับกลุ่ม กลุ่มละ 3 พจน์และ 1 พจน์
3. การแยกตัวประกอบโดยจับคู่กลุ่มที่สามารถแยกตัวประกอบได้ไว้ด้วยกันก่อน

รายการที่ 7 การแยกตัวประกอบพหุนาม

การแยกตัวประกอบของพหุนาม 5 พจน์

แยกตัวประกอบโดยการจับกลุ่ม กลุ่มละ 3 พจน์ และ 2 พจน์

ตัวอย่างที่ 15 จงแยกตัวประกอบของ $x^4+x^3-3x^2-5x-2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}x^4+x^3-3x^2-5x-2 &= (x^4+x^3) - (3x^2+5x+2) \\ &= x^3(x+1) - (3x+2)(x+1) \\ &= (x+1)[x^3-(3x+2)] \\ &= (x+1)(x^3-3x-2)\end{aligned}$$

การแยกตัวประกอบของพหุนาม 6 พจน์

1. การแยกตัวประกอบโดยจับกลุ่ม 3 กลุ่ม กลุ่มละ 2 พจน์

ตัวอย่างที่ 16 จงแยกตัวประกอบของ

$$ax - bx + by + cy - cx - ay$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}ax-bx+by+cy-cx-ay &= (ax - ay) - (bx - by) - (cx - cy) \\ &= a(x - y) - b(x - y) - c(x - y) \\ &= (x - y)(a - b - c)\end{aligned}$$

2. การแยกตัวประกอบโดยจับกลุ่ม 2 กลุ่ม กลุ่มละ 3 พจน์

ตัวอย่างที่ 17 จงแยกตัวประกอบของ

$$a^2 + 2bc - c^2 - b^2 + 1 - 2a$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}a^2+2bc-c^2-b^2+1-2a &= (a^2 - 2a + 1) - (b^2 - 2bc + c^2) \\ &= (a - 1)^2 - (b - c)^2 \\ &= [(a - 1) - (b - c)][(a - 1) + (b - c)] \\ &= (a - 1 - b + c)(a - 1 + b - c) \\ &= (a - b + c - 1)(a + b - c - 1)\end{aligned}$$

รายการที่ 7 การแยกตัวประกอบพหุนาม

3. การแยกตัวประกอบโดยจับกลุ่ม กลุ่มละ 3 พจน์ 2 พจน์ และ 1 พจน์

ตัวอย่างที่ 18 จงแยกตัวประกอบของ $a^2 + b^2 - 5a - 5b + 2ab + 6$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } a^2 + b^2 - 5a - 5b + 2ab + 6 &= (a^2 + 2ab + b^2) - (5a + 5b) + 6 \\ &= (a + b)^2 - 5(a + b) + 6 \\ &= (a + b - 3)(a + b - 2)\end{aligned}$$

สรุป

การแยกตัวประกอบของพหุนาม 6 พจน์ ทำได้โดย

1. การแยกตัวประกอบโดยจับกลุ่ม 3 กลุ่ม กลุ่มละ 2 พจน์
2. การแยกตัวประกอบโดยจับกลุ่ม 2 กลุ่ม กลุ่มละ 3 พจน์
3. การแยกตัวประกอบโดยจับกลุ่ม กลุ่มละ 3 พจน์ 2 พจน์ และ 1 พจน์

การแยกตัวประกอบโดยใช้ทฤษฎีหาเศษ

ตัวอย่างที่ 19 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 39x + 70$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ ให้ } p(x) &= x^3 - 39x + 70 \\ p(2) &= 2^3 - 39(2) + 70 \\ &= 8 - 78 + 70 \\ &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $x - 2$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $p(x)$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } x^3 - 39x + 70 &= (x - 2)(x^2 + 2x - 35) \\ &= (x - 2)(x + 7)(x - 5)\end{aligned}$$

รายการที่ 7 การแยกตัวประกอบพหุนาม

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีรูปแบบไม่ตรงกับที่กล่าวมาแล้ว อาจทำได้โดย

- กรณีโจทย์มีวงเล็บ ให้กระจายวงเล็บก่อน

ตัวอย่างที่ 20 จงแยกตัวประกอบของ $a^2(1+b) - b^2(1+a)$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad a^2(1+b) - b^2(1+a) &= a^2 + a^2b - b^2 - ab^2 \\ &= (a^2 - b^2) + (a^2b - ab^2) \\ &= (a-b)(a+b) + ab(a-b) \\ &= (a-b)(a+b+ab)\end{aligned}$$

- จับคู่พจน์ที่แยกตัวประกอบได้ก่อนไว้ด้วยกัน

ตัวอย่างที่ 21 จงแยกตัวประกอบของ $x - 1 - 3(x^2 - 1)$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad x - 1 - 3(x^2 - 1) &= (x - 1) - 3(x - 1)(x + 1) \\ &= (x - 1)[1 - 3(x + 1)] \\ &= (x - 1)(1 - 3x - 3) \\ &= (x - 1)(-3x - 2) \\ &= -(x - 1)(3x + 2)\end{aligned}$$

แนวข้อสอบ

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ค่าของ $A^6 + B^6$ ตรงกับข้อใด ถ้า $A + B = x$ และ $AB = y$

ก. $(x^2 - 2y)[(x^2 - 2y)^2 - 3y^2]$

ข. $(x^2 - 2y)[(x^2 - 2y)^2 - 3y]$

ค. $(x^2 - 2y)[(x^2 - 2y) - 3y^2]$

ง. $(x^2 - 2y)(x^2 - 2y^2 + 3y)$

$$\begin{array}{lll}\text{แนวคิด} & \text{จาก } (A + B) & = x \\ \text{จะได้} & (A + B)^2 & = x^2 \\ & A^2 + 2AB + B^2 & = x^2 \\ & A^2 + B^2 + 2AB & = x^2 \\ & A^2 + B^2 + 2y & = x^2 \\ & A^2 + B^2 & = x^2 - 2y \\ & A^6 + B^6 & = (A^2)^3 + (B^2)^3\end{array}$$

รายการที่ 7 การแยกตัวประกอบพหุนาม

$$\begin{aligned} &= (A^2 + B^2)(A^4 - A^2B^2 + B^4) \\ &= (A^2 + B^2)(A^4 + 2A^2B^2 + B^4 - 3A^2B^2) \\ &= (A^2 + B^2)[(A^2 + B^2)^2 - 3A^2B^2] \end{aligned}$$

แทนค่า $A^2 + B^2$ และ AB
จะได้ $A^2 + B^2 = (x^2 - 2y)$ และ $AB = (x^2 - 2y)^2 - 3y^2$

2. พหุนามในข้อใดเป็น ห.ร.ม. ของ $x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ กับ $x^3 - 2x^2 - 10x - 8$

ก. $x^2 - 3x + 2$

ข. $x^2 + 3x + 2$

ค. $x^2 + 3x - 2$

ง. $x^2 - 3x - 2$

$$\begin{aligned} \text{แนวคิด ให้ } p(x) &= x^3 - 2x^2 - 13x - 10 \\ p(-2) &= (-2)^3 - 2(-2)^2 - 13(-2) - 10 \\ &= -8 - 8 + 26 - 10 \\ &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = (x+2)(x^2 - 4x - 5)$
 $= (x+2)(x-5)(x+1)$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } q(x) &= x^3 - x^2 - 10x - 8 \\ q(-1) &= (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8 \\ &= -1 - 1 + 10 - 8 = 0 \end{aligned}$$

จะได้ $x^3 - x^2 - 10x - 8 = (x+1)(x^2 - 2x - 8)$
 $= (x+1)(x+2)(x-4)$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ $x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ กับ $x^3 - x^2 - 10x - 8$
คือ $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$

3. ตัวประกอบตัวหนึ่งของ $x^2 - y^2 + 2x + 8y - 15$ ตรงกับข้อใด

ก. $(x - y - 5)$

ข. $(x + y + 3)$

ค. $(x - y + 5)$

ง. $(x - y + 3)$



รายการที่ 7 การแยกตัวประกอบพหุนาม

แนวคิด

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 + 2x + 8y - 15 &= (x^2 - y^2) + 2x + 8y - 15 \\ &= [(x + y) - 3][(x - y) + 5] \\ &= (x + y - 3)(x - y + 5)\end{aligned}$$

4. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $x^2 - 6y^2 - 3x - 11y - xy - 4$

ก. $(x - 3y - 1)(x + 2y + 4)$

ข. $(x - 3y - 4)(x + 2y + 1)$

ค. $(x + 3y - 4)(x - 2y + 1)$

ง. $(x - 3y + 4)(x + 2y - 1)$

แนวคิด

$$\begin{aligned}x^2 - 6y^2 - 3x - 11y - xy - 4 &= (x^2 - xy - 6y^2) - 3x - 11y - 4 \\ &= (x - 3y)(x + 2y) - 3x - 11y - 4 \\ &= [(x - 3y) - 4][(x + 2y) + 1] \\ &= (x - 3y - 4)(x + 2y + 1)\end{aligned}$$

5. ผลคูณของคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มทั้งหมดของสมการ $x^7 + x^4 - 16x^3 = 16$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ก. -4

ข. 4

ค. 8

ง. 12

แนวคิด

$$x^7 + x^4 - 16x^3 = 16$$

$$x^7 + x^4 - 16x^3 - 16 = 0$$

$$(x^4 - 16)(x^3 + 1) = 0$$

จะได้ $x^4 - 16 = 0$ หรือ $x^3 + 1 = 0$

$$x^4 = 16 \qquad x^3 = -1$$

$$x = -2 \text{ หรือ } x = 2 \qquad x = -1$$

ดังนั้นผลคูณของคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มทั้งหมดของสมการเท่ากับ $(-2)(2)(-1) = 4$



รายการที่ 7 การแยกตัวประกอบพหุนาม

6. กำหนด $x^3 - 4x^2 + ax + b$ มี $(x - 3)$ และ $x + 1$ เป็นตัวประกอบ $a + b$ เท่ากับเท่าใด

ก. 6

ข. 7

ค. 8

ง. 9

แนวคิด ให้ $p(x) = x^3 - 4x^2 + ax + b$

$x - 3$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$ แสดงว่า $p(3) = 0$

จะได้
$$\begin{aligned} p(3) &= 3^3 - 4(3)^2 + a(3) + b = 0 \\ 3a + b &= 9 \end{aligned} \quad (1)$$

$x + 1$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$ แสดงว่า $p(-1) = 0$

จะได้
$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^3 - 4(-1)^2 + a(-1) + b = 0 \\ -a + b &= 5 \end{aligned} \quad (2)$$

แก้สมการจะได้ $a = 1$ และ $b = 6$

ดังนั้น $a + b = 1 + 6 = 7$

