

ตอนที่ 4

เรื่อง จำนวนจริงในรูปรากหรือกรณฑ์ (Radicals)

มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐานที่ 2.2 มีความรู้ความเข้าใจ และทักษะพื้นฐานเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มาตรฐานการเรียนรู้ระดับ มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวน และการดำเนินการเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ เซต และการให้เหตุผล อัตราส่วนตรีโกณมิติและการนำไปใช้ การใช้เครื่องมือและการออกแบบผลิตภัณฑ์ สติปัญญาเบื้องต้นและความน่าจะเป็น เชื่อมโยงกับงานอาชีพในสังคมและอาเซียน ได้

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

เข้าใจความหมายและหาผลลัพธ์ที่เกิดจากการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนจริงที่อยู่ในรูปรากหรือกรณฑ์ (Radicals) ได้

ขอบข่ายเนื้อหา

1. ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่มีเลขชี้กำลังที่เป็นจำนวนตรรกยะกับจำนวนจริงในรูปราก

เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 และ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ a ไม่เป็นจำนวนจริงลบ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ จะได้

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} &= (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \\ \text{และ } a^{\frac{m}{n}} &= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \end{aligned}$$

2. การบวก การลบ การคูณ การหาร จำนวนจริงในรูปรากหรือกรณฑ์ (Radicals)

สมบัติของราก

สำหรับ k, m และ n ซึ่งเป็นจำนวนนับที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง x และ y เป็นจำนวนจริงบวก จะได้

$$1. \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$\text{ตัวอย่าง } \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$2. \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$$

$$\text{ตัวอย่าง } \sqrt[4]{xy} = \sqrt[4]{x} \sqrt[4]{y}$$

$$3. \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, \quad y \neq 0$$

$$\text{ตัวอย่าง} \quad \sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$$

$$4. \quad \sqrt[kn]{x^k y^m} = \sqrt[n]{x^m}$$

$$\text{ตัวอย่าง} \quad \sqrt[16]{x^{12}} = \sqrt[4 \cdot 4]{x^{4 \cdot 3}} = \sqrt[4]{x^3}$$

$$5. \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$$

$$\text{ตัวอย่าง} \quad \sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[12]{x}$$

สมบัติเหล่านี้นำไปใช้ในการหาผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และผลหารของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่มีลักษณะครบตามเงื่อนไข

กิจกรรมก่อนการรับชมรายการ

ครูผู้สอนสนทนากับผู้เรียนเกี่ยวกับบทนิยามของรากที่ n ของจำนวนจริงใดๆ โดยอาจดำเนินการดังนี้

- การหารากที่สองของจำนวนเต็ม โดยอาจใช้คำถามหรือใช้แบบฝึกเติมคำตอบสั้นๆ เช่น

รากที่สองของ 4 คือ..... (2 และ -2 เพราะ $2^2 = 4$ และ $(-2)^2 = 4$)

รากที่สองของ 9 คือ..... (3 และ -3 เพราะ $3^2 = 9$ และ $(-3)^2 = 9$)

รากที่สองของ 12 คือ..... ($\sqrt{12}$ และ $-\sqrt{12}$ เพราะ $\sqrt{12}^2 = 12$ และ $(-\sqrt{12})^2 = 12$)

การหารากที่สองของจำนวนที่กำหนดให้ เป็นการหาจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วได้จำนวนนั้น หรือการหารากที่สาม รากที่สี่ หรือรากที่ห้าของจำนวนใดจำนวนหนึ่ง ก็เป็นการหาจำนวนที่ยกกำลังสาม ยกกำลังสี่ และยกกำลังห้าแล้วได้จำนวนนั้น

กิจกรรมของครูขณะชมรายการโทรทัศน์

สังเกตพฤติกรรม และความสนใจของผู้เรียน

กิจกรรมหลังการรับชมรายการ

1. ครูผู้สอนและผู้เรียนร่วมกันอภิปรายสรุปเนื้อหาตามบทเรียนที่ได้รับชมรายการ

2. ให้ผู้เรียนฝึกทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. จงหาค่าของ $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3}$

2. จงหาค่าของ $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125}$

3. จงหาค่าของ $3\sqrt{20} + 2\sqrt{18} - \sqrt{45} + \sqrt{8}$

4. จงหาค่าของ $(\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt{2})^6$

5. จงหาค่าของ $\left(\frac{1}{128}\right)^{-\frac{5}{7}}$

6. จงหาค่าของ x

$$\sqrt{16x^2 - 14x - 2} = \sqrt{21x^2 - 23x - 20}$$

3. ให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบเพื่อวัดความเข้าใจในเนื้อหาที่รับชม

แบบทดสอบ

1. จงทำ $\sqrt[3]{2^3} + \sqrt{2^2}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายตรงกับข้อใด

ก. 2^4

ข. 2^3

ค. 2^2

ง. 2

2. จงหาค่าของ $\sqrt[3]{2} [3\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{5}]$

ก. $5 + 2\sqrt[3]{10}$

ข. $6 + 2\sqrt[3]{10}$

ค. $3\sqrt[3]{6} + 4\sqrt[3]{5}$

ง. $3\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{10}$

3. ข้อใดคือค่าของ $\frac{\sqrt{50} + \sqrt{32}}{\sqrt{18}}$

ก. 3

ข. 6

ค. $3\sqrt{2}$

ง. $9\sqrt{2}$

4. จงหาค่าของ $(\sqrt{72} - 2\sqrt{18}) \left(\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{10}} \right)$

ก. 0

ข. 1

ค. $6\sqrt{2}$

ง. $12\sqrt{2}$

5. จงหาค่าของ $\sqrt{50} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$

ก. 3

ข. 5

ค. $6\sqrt{2}$

ง. $5\sqrt{2}$

เฉลยแบบฝึกหัด

1. จงหาค่าของ $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3} &= \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ &= (2 + 3 - 1)\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

2. จงหาค่าของ $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125}$

$$\begin{aligned}\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125} &= \sqrt{4}\sqrt{5} + \sqrt{9}\sqrt{5} - \sqrt{25}\sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} \\ &= (2 + 3 - 5)\sqrt{5} \\ &= 0\sqrt{5} \\ &= 0\end{aligned}$$

3. จงหาค่าของ $3\sqrt{20} + 2\sqrt{18} - \sqrt{45} + \sqrt{8}$

$$\begin{aligned}3\sqrt{20} + 2\sqrt{18} - \sqrt{45} + \sqrt{8} &= (3)(2)\sqrt{5} + (2)(3)\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2}\end{aligned}$$

4. จงหาค่าของ $(\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt{2})^6$

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt{2})^6 &= \left((5^2)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^6 \\ &= \left(5^{\frac{2}{3}}\right)^6 \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 \\ &= 5^{\frac{12}{3}} \cdot 2^{\frac{6}{2}} \\ &= 5^4 \cdot 2^3 \\ &= 5,000\end{aligned}$$

5. $\left(\frac{1}{128}\right)^{-\frac{5}{7}}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{128}\right)^{-\frac{5}{7}} &= (128)^{\frac{5}{7}} \\ &= (2^7)^{\frac{5}{7}} \\ &= 2^5 \\ &= 32 \end{aligned}$$

6. จงหาค่า x

$$\begin{aligned} \sqrt{16x^2 - 14x - 2} &= \sqrt{21x^2 - 23x - 20} \\ \text{ยกกำลังสอง จะได้ } 16x^2 - 14x - 2 &= 21x^2 - 23x - 20 \\ 5x^2 - 9x - 18 &= 0 \\ (5x + 6)(x - 3) &= 0 \\ x &= -\frac{6}{5} \text{ หรือ } x = 3 \end{aligned}$$

การตรวจสอบคำตอบ

แทน x ด้วย $-\frac{6}{5}$ ในสมการ

$$\sqrt{16x^2 - 14x - 2} = \sqrt{21x^2 - 23x - 20} \quad \text{ได้สมการเป็นจริง}$$

แทน x ด้วย 3 ในสมการ

$$\sqrt{16x^2 - 14x - 2} = \sqrt{21x^2 - 23x - 20} \quad \text{ได้สมการเป็นจริง}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ $\left\{-\frac{6}{5}, 3\right\}$

เฉลยแบบทดสอบ

1. ก

2. ข

3. ก

4. ก

5. ค