จำนวนเชิงซ้อน

1 เรื่องทั่ว ๆ ไปของจำนวนเชิงซ้อน

.1.1 เกี่ยวกับ i

นักคณิตศาสตร์ สร้างจำนวนจินตภาพ i ขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหา
การหาคำตอบของสมการ $x^2 = -1$ โดยกำหนดว่า $i^2 = -1$

จึงได้

$i^2 = -1$	หรือเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก	$i^{4n} = 1$
$i^3 = -i$		$i^{4n+1} = i$
$i^4 = 1$		$i^{4n+2} = -1$
		$i^{4n+3} = -i$

$* \; i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} = 0$

.1.2 **จำนวนเชิงซ้อน** คือ จำนวนที่เขียนอยู่ในรูป $a + bi$ เมื่อ $a, b \in R$

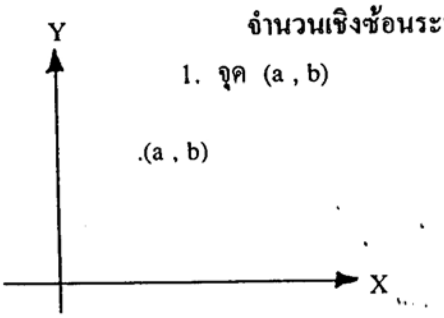
$C = \{x \mid x = a + bi, a, b \in R\}$ และมีสมบัติดังนี้

1) การเท่ากัน $a + bi = c + di$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
2) การบวก $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
3) การคูณ $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

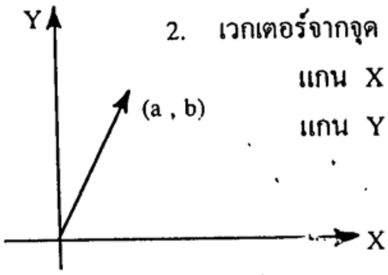
จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ อาจเขียนอีกรูปแบบหนึ่ง คือ (a, b) ก็ได้
เรียก a ว่า **ส่วนจริง** (real part) ของ z เขียนแทนด้วย Re(z)
เรียก b ว่า **ส่วนจินตภาพ** (imaginary part) ของ z เขียนแทนด้วย Im(z)
ถ้า $b = 0$ แล้ว จะได้จำนวนจริง a นั่นเอง กล่าวคือ $R \subset C$
ถ้า $a = 0$ แล้ว จะได้จำนวนจินตภาพ bi เรียกว่า **จำนวนจินตภาพแท้** (pure imaginary number)
พิจารณา $(bi)(di) = -bd$ นั่นคือ **"ผลคูณของจำนวนจินตภาพแท้สองจำนวนได้จำนวนจริงเสมอ"**

จำนวนเชิงซ้อนระนาบ เขียนได้ 2 แบบ

1. จุด (a , b)



2. เวกเตอร์จากจุด (0 , 0) ไปยัง (a , b)
แกน X คือ แกนจริง
แกน Y คือ แกนจินตภาพ



สมบัติของระบบจำนวนเชิงซ้อน

เมื่อ $z = (a, b) = a + bi$ ระบบ $C, +, \times$ มีสมบัติดังต่อไปนี้

1. สมบัติปิดของการบวก $z_1, z_2 \in C \rightarrow z_1 + z_2 \in C$
2. สมบัติเปลี่ยนกลุ่มได้ของการบวก $z_1, z_2, z_3 \in C \rightarrow (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก คือ $(0, 0)$
4. สมบัติการมีอินเวอร์สการบวก คือ $(-a, -b)$ เป็นอินเวอร์สการบวกของ (a, b)
5. สมบัติการสลับที่ของการบวก $z_1, z_2 \in C \rightarrow z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
6. สมบัติปิดของการคูณ $z_1, z_2 \in C \rightarrow z_1 z_2 \in C$
7. สมบัติเปลี่ยนกลุ่มได้ของการคูณ $z_1, z_2, z_3 \in C \rightarrow (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
8. สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณ คือ $(1, 0)$
9. สมบัติการมีอินเวอร์สการคูณ คือ $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$, เมื่อ $(a, b) \neq (0, 0)$, เป็นอินเวอร์สการคูณของ (a, b)
10. สมบัติการสลับที่ของการคูณ $z_1, z_2 \in C \rightarrow z_1 z_2 = z_2 z_1$
11. สมบัติการแจกแจง $z_1, z_2, z_3 \in C \rightarrow z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

1.3 ค่าสัมบูรณ์ และสังยุค

บทนิยาม ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value) ของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ เขียนแทนด้วย $|z|$

โดย $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

จากนิยาม ค่าสัมบูรณ์ของ $a + bi$ ก็คือระยะทางจากจุดกำเนิด $(0, 0)$ ถึงจุด (a, b) เมื่อแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยจุดบนระนาบนั่นเอง

บทนิยาม สังยุค (Conjugate) ของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ คือ $a - bi$ เขียนแทนด้วย $\overline{z}$

$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

"ผลคูณของ z กับ $\overline{z}$ ใด ๆ จะได้จำนวนจริงบวกหรือศูนย์เสมอ"

สมบัติของคอนจูเกต

1. $z = z$
2. $z_1 + z_2 = z_1 + z_2$
3. $z_1 - z_2 = z_1 - z_2$
4. $z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2$
5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$
6. $(\overline{z})^n = \overline{(z^n)}$

สมบัติของค่าสัมบูรณ์

1. $|z| = |-z| = |z| = \sqrt{z\overline{z}}$
2. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
3. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
4. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$
6. $|z^n| = |z|^n$ เมื่อ $n \in I^+$

1.4 การเปรียบเทียบจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z_1 = a + bi, b \neq 0$ และ $z_2 = c + di, d \neq 0$ แล้ว เราไม่อาจเปรียบเทียบได้ว่าจำนวนใดมากหรือน้อยกว่ากัน สรุป ก็คือ **"ไม่มีการเปรียบเทียบมากน้อยในระบบจำนวนเชิงซ้อน"** เราบอกไม่ได้ว่า $3 + 4i$ มากกว่าหรือน้อยกว่า $3 - 2i$ บอกได้แต่เพียงว่า $|3 + 4i|$ มากกว่า $|3 - 2i|$

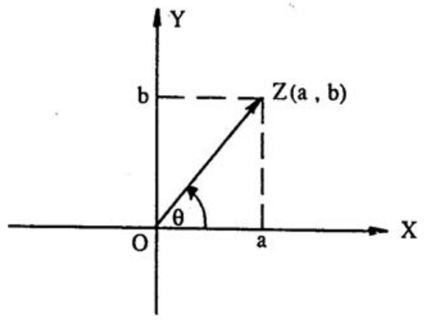
1.5 บทประยุกต์ของค่าสัมบูรณ์ในเชิงกราฟ

กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน $z = x + yi$ เมื่อ $x, y \in R$, ถ้า r, h และ k เป็นจำนวนจริงแล้ว

1. $|z| = r$ หมายถึงสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ และรัศมี $= r$
2. $|z - h| = r$ หมายถึงสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(h, 0)$ และรัศมี $= r$
3. $|z - ki| = r$ หมายถึงสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, k)$ และรัศมี $= r$
4. $|z - h - ki| = r$ หมายถึงสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) และรัศมี $= r$

2 การแทนจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดเชิงขั้ว

ให้ $z = a + bi$ ที่ $z \neq 0$ เราสามารถเขียนแทน z ด้วยเวกเตอร์บนระนาบเชิงซ้อนได้ดังนี้



รูป 2.3

เมื่อกำหนดให้ θ เป็นมุมบวกที่เล็กที่สุดที่วัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ทางด้านบวกไปยัง $\overrightarrow{OZ}$ และให้ $r = |\overrightarrow{OZ}|$ จากรูป 2.3 จะได้

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r} \text{ หรือ } b = r\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \text{ หรือ } a = r\cos\theta$$

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad z &= a + bi \\ &= r\cos\theta + ri\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

ดังนั้น $z = a + bi$ สามารถเขียนอยู่ในรูป $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ โดยที่ $\tan\theta = \frac{b}{a}$ และเรียก $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ว่ารูปเชิงขั้ว (polar form) ของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ และเรียก θ ว่าเป็นอาร์กิวเมนต์ของ z (argument of z)

แต่เนื่องจาก $\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi)$

และ $\sin\theta = \sin(\theta + 2k\pi)$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นจึงได้ $r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)]$ เป็นรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ ด้วย

การคูณและหารจำนวนเชิงซ้อนรูปเชิงขั้ว

กำหนด $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

1. $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$, $z_2 \neq 0$

ทฤษฎีบทของเดอมัวฟ์ (De Moivre's Theorem)

กำหนด $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

.3 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนมีลักษณะดังนี้

1. ให้ x และ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวก x จะเป็นรากที่ n ของ z ก็ต่อเมื่อ $x^n = z$
2. ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $z \neq 0$ แล้วรากที่ n ของ z มีทั้งหมด n รากที่แตกต่างกัน คือ

$$x = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right]$$

เมื่อ $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)\}$

.4 สมการพหุนามตัวแปรเดียว

สมการพหุนามกำลัง n ตัวแปรเดียว คือ สมการที่อยู่ในรูป

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_0, a_1, \ldots a_n$ เป็นจำนวนจริงที่ $a_n \neq 0$

ทฤษฎีบท หลักมูลทางพีชคณิต (The Fomdamental theorem of algebra) สำหรับสมการพหุนามกำลัง n ตัวแปรเดียว เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะมีรากของสมการอย่างน้อย 1 ราก

ทฤษฎีบทเศษเหลือ เมื่อ $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก ; $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$ ถ้าหารพหุนาม f(x) ด้วยพหุนาม x - c เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ แล้วจะได้เศษที่เหลือจากการหารนั้นเท่ากับ f(c)

ทฤษฎีบทตัวประกอบ f(x) เป็นพหุนามกำลัง n จะมี x - c เป็นตัวประกอบได้ก็ต่อเมื่อ f(c) = 0

ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ $f(x)$ เป็นพหุนามกำลัง n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $f(x)$ โดยที่ k และ m เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $m \neq 0$ และ ห.ร.ม. ของ m และ k เท่ากับ 1 แล้ว m จะเป็นตัวประกอบของ a_n และ k จะเป็นตัวประกอบของ a_0

สมการพหุนามกำลัง n

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริงที่ $a_n \neq 0$ ถ้า $a + bi$ เป็นคำตอบของสมการแล้ว $a - bi$ ก็จะเป็นคำตอบของสมการด้วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงโดยที่ $b \neq 0$

แบบฝึกประสบการณ์จำนวนเชิงซ้อน

1. กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $z_1 - z_2$ เป็นจำนวนจริง และ $z_1^2 - 2z_2^2$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้ $z_1\overline{z}_1$ มีค่าเท่าใด (Ent คณิต กข 2532)

   1. $2(z_2 + \overline{z}_2)^2$ 2. $\frac{1}{2}(z_2 + \overline{z}_2)^2$ 3. $2z_2\overline{z}_2$ 4. $\frac{1}{2}z_2\overline{z}_2$

2. กำหนดให้ $z = i^9 + i^{10} + \ldots + i^{126}$ เมื่อ $i^2 = -1$ แล้ว $2z^{-1}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต 1/1 2544)

   1. $1 + i$ 2. $1 - i$ 3. $-1 + i$ 4. $-1 - i$

3. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $(1 + i)(\overline{z + 1}) = -1$ แล้วส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน $z(z - z)^{15}$ เท่ากับข้อใด (Ent คณิต กข 2541)

   1. $-\frac{3}{2}$ 2. $\frac{3}{2}$ 3. $-\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{2}$

4. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $|z| = |3 - 4i|$ และ $|z - 1| = \sqrt{30}$ แล้วส่วนจินตภาพของ z อยู่ในเซตใดต่อไปนี้ (Ent คณิต 1/2 2543)

   1. $\{-4, 4\}$ 2. $\{-\sqrt{21}, \sqrt{21}\}$

   3. $\{-3, 3\}$ 4. $\{-\sqrt{24}, \sqrt{24}\}$

6. กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่

$2z_1\overline{z}_2 = 1+\overline{z}_2$ และ

$z_1 = \left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right)^6$

7. ข้อใดต่อไปนี้คือ อินเวอร์สการคูณของ z_2 (Ent คณิต 1/2 2543)

1. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$ 2. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$ 3. $\sqrt{3}i$ 4. $-\sqrt{3}i$

ถ้า $2z^3 = 1+\sqrt{3}i$ และ $\frac{z^{18}}{i - z^{27}} = a + bi$

8. เมื่อ a , b เป็นจำนวนจริง แล้ว a + b มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต 1/1 2544)

1. -1 2. 0 3. 1 4. 2

9. ถ้า $z_1 = \cos 12° + i\sin 12°$ และ $z_2 = -\cos 16° - i\sin 16°$ แล้ว $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{15}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

(Ent คณิต 1/2 2543)

1. $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 2. $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 3. $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ 4. $\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$

10. ถ้า $z = -2+2\sqrt{3}i$ เมื่อ $i^2 = -1$ แล้ว z^{17} อยู่ในควอดแรนต์ในข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต 1/2 2542)

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

11. กำหนดให้ $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ส่วนจริงของ $\frac{1}{1+z^5}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต กข 2539)

1. -1 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. 1

12. ให้ $z = -1-\sqrt{3}i$ แล้ว $z^6 + \bar{z}^6$ เท่ากับเท่าใด (Ent คณิต 1/2 2544)

ให้ α , β และ γ เป็นรากทั้งสามของสมการ

$\sqrt{2}z^3 = 1+i$

13. ถ้า α และ β เป็นรากที่อยู่ในควอแดรนท์ที่ 1 และ 2 ตามลำดับแล้ว $4\alpha^4 - \beta^4 + 2\gamma^4$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต กข 2537)

1. 4 2. $(1+3\sqrt{3})+i$

3. $4+\sqrt{3}i$ 4. $1+3\sqrt{3}$

14. ให้ z_1 , z_2 , z_3 , z_4 เป็นรากของสมการ $z^4 + z^2 + 2 = 0$, $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต 1/1 2543)

1. 2 2. 4 3. $2^{\frac{5}{2}}$ 4. $2^{\frac{9}{4}}$

15. ถ้า $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{39}}{4}i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $ax^2 - 3x + c = 0$ โดยที่ a และ c เป็นจำนวนจริงแล้ว เศษที่เหลือจากการหาร $ax^2 - 3x + c$ ด้วย x + 2 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต 1/2 2544)

1. 8 2. 12 3. 16 4. 20

ให้ P(x) เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและสัมประสิทธิ์ของ x^3 เป็น 1 ถ้า x - 2 หาร P(x) เหลือเศษ 5 และ $(1+\sqrt{3}i)$ เป็นรากหนึ่งของ P(x) แล้วรากที่เป็นจำนวนจริงของ P(x) คือค่าในข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต 1/1 2542)

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{4}{3}$ 3. $\frac{5}{4}$ 4. $\frac{4}{5}$

ให้ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 10$ โดยที่ a , b เป็นจำนวนจริง และ $f(1+2i) = 0$ จงหาส่วนจริงของ $f(i^{10})$ (Ent คณิต กข 2541)

เฉลยแบบฝึกประสบการณ์ จำนวนเชิงซ้อน

1.	2	9.	3
2.	4	10.	128
3.	4	11.	3
4.	2	12.	4
5.	4	13.	4
6.	2	14.	1
7.	1	15.	-32
8.	1		