แคลคูลัส

1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

.1.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

บทนิยาม เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง ถ้าค่าของ f(x) เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย และค่าของ f(x) เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา เรากล่าวว่า L เป็นลิมิตของฟังก์ชัน f ที่ x เข้าใกล้ a และเขียนแทนด้วย $\lim_{x \to a} f(x) = L$

การหา $\lim_{x \to a} f(x)$

(1) หา $\lim_{x \to a^-} f(x)$

(2) หา $\lim_{x \to a^+} f(x)$

(3) และ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \to a} f(x)$ มีค่า

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ

$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$

.1.2 ทฤษฎีของลิมิต

ทฤษฎีบท ต่าง ๆ ที่ช่วยในการหาลิมิตของฟังก์ชันที่ควรทราบมีดังนี้

ถ้า $f(x) = c$, c ค่าคงที่ แล้ว

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c$

2. ถ้า $f(x) = x^n$, n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x^n) = a^n$$

3. ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = M$

(1) $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x) = cL$

(2) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$

(3) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L \cdot M$

(4) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$

(5) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$, $n \in I^+$

(6) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$, $n \in I^+ - \{1\}$ และ $\sqrt[n]{L} \in R$

ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function)

คือ ฟังก์ชันที่เขียนในรูป $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0$ เป็นจำนวนจริง

4. ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้ว $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

5. ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L, L \neq 0$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ แล้ว $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ หาค่าไม่ได้

..1.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

บทนิยาม เมื่อ $a \in R$ ฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อมีสมบัติดังนี้

(1) f(a) หาค่าได้

(2) $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้

และ (3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ดังนั้นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Differentiation of Algebraic Function)

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ใด ๆ นิยามได้ดังนี้

บทนิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ หาค่าได้ เรียกค่าลิมิตที่ได้นี้ว่า "อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x" เขียนแทนด้วย $f'(x)$

ดังนั้น
$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ จะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

บทนิยาม
1. เรากล่าวว่า f มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) ก็ต่อเมื่อ f มีอนุพันธ์ ทุก ๆ จุด $x \in (a, b)$
2. เรากล่าวว่า f มีอนุพันธ์บนช่วงปิด $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ f มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) f มีอนุพันธ์ทางขวาที่ $x = a$ และ f มีอนุพันธ์ทางซ้ายที่ $x = b$

อนุพันธ์ของ f ที่ $x = a$

อนุพันธ์ของ f ที่ $x = a$ เขียนแทนด้วย $f'(a)$ หรือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{เมื่อลิมิตมีค่า}$$

ถ้าให้ $x = a + h$ เมื่อ $h \to 0$ จะได้ว่า $x \to a$ ดังนั้น

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{เมื่อลิมิตมีค่า}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ จะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

สรุป 1. ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ $x = a$ แล้ว f จะต่อเนื่องที่ $x = a$
2. ถ้า f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = a$ แล้ว f จะไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = a$
3. ถ้า f ต่อเนื่องที่ $x = a$ แล้วอาจจะมีหรือไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = a$

..2.1 สูตรของอนุพันธ์

ให้ c เป็นค่าคงตัว

1. $\frac{d(c)}{dx} = 0$
2. $\frac{d(x)}{dx} = 1$
3. $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$
4. $\frac{d(cf(x))}{dx} = cf'(x)$
5. $\frac{d[f(x) \pm g(x)]}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$
6. $\frac{d[f(x)g(x)]}{dx} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$
8. ถ้า $y = (fog)(x) = f(g(x))$ เป็นฟังก์ชันของ x แล้ว
   $\frac{dy\ f'(g(x))}{dx} \cdot g'(x)$
9. ถ้า $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ แล้ว
   $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
10. ถ้า $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ แล้ว
   $\frac{d[f(u)]}{dx} = \frac{d[f(u)]}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
11. $\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$, $u = g(x)$
13. ถ้า $y = f(u)$, $u = g(x)$ และ $x = h(t)$
   $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

.2.3 ความชันของเส้นโค้ง

ถ้า $y = f(x)$ เป็นสมการเส้นโค้ง

1. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ $= f'(x)$
2. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(x_1, y_1) = f'(x_1)$
3. ความชันของเส้นปกติที่จุด $(x_1, y_1) = \frac{-1}{f'(x_1)}$, $f'(x_1) \neq 0$
4. สมการของเส้นตรงที่มีความชัน $= m$ และผ่านจุด (x_1, y_1) คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

.2.4 การเคลื่อนที่ของวัตถุ

ให้ s , v และ a เป็นระยะทางความเร็วและความเร่งขณะ t ใด ๆ

ถ้า $s = f(t)$ เป็นสมการการเคลื่อนที่

ในช่วง $[t , t + h]$

ความเร็วเฉลี่ย $(\bar{v}) = \dfrac{f(t + h) - f(t)}{h}$

ความเร็วขณะ t ใด ๆ (v)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h}$$

$$= f'(t) = \frac{ds}{dt}$$

บทนิยาม	ถ้า v เป็นความเร็วของวัตถุในขณะเวลา t แล้วอัตราเร็วของวัตถุ ในขณะเวลา t คือ $\lvert v \rvert$

ความเร่งเฉลี่ย $(\bar{a})$ ในช่วง t ถึง $t + h(a) = \dfrac{f'(t + h) - f'(t)}{h}$

$$a = \frac{f'(t + h) - f'(t)}{h}$$

$$a = \lim_{h \to 0} \frac{f'(t + h) - f'(t)}{h}$$

$$= \frac{dv}{dt}$$

$$= f''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

บทนิยาม	ถ้า a เป็นความเร่งของวัตถุในขณะเวลา t แล้วอัตราเร่งของวัตถุในขณะเวลา t คือ $\lvert a \rvert$

หลักในการหาช่วงเวลาที่ทำให้ความเร็ว (v) เพิ่มขึ้นหรือลดลง

กรณีที่ 1 ถ้า $a > 0$ แล้วแสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่ทำให้ v มีค่าเพิ่มขึ้น

กรณีที่ 2 ถ้า $a < 0$ แล้วแสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่ทำให้ v มีค่าลดลง

กรณีที่ 3 ถ้า $a = 0$ แล้วแสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่ทำให้ v คงที่

หลักในการหาช่วงเวลาที่ทำให้อัตราเร็ว ($|v|$) เพิ่มขึ้นหรือลดลง

กรณีที่ 1 ถ้า v และ a มีเครื่องหมายเหมือนกันแล้วแสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่ทำให้อัตราเร็วเพิ่มขึ้น

กรณีที่ 2 ถ้า v และ a มีเครื่องหมายต่างกันแล้วแสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่ทำให้อัตราเร็วลดลง

กรณีที่ 3 ถ้า $v = 0$ แต่ $a \neq 0$ วัตถุจะเปลี่ยนทิศทางการเคลื่อนที่

.2.5 อัตราการเปลี่ยนแปลง

บทนิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนไปเป็น $x + h$ โดยที่ $h \neq 0$ ค่าของ y เปลี่ยนจาก $f(x)$ ไปเป็น $f(x + h)$ แล้ว

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$

คือ $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ

คือ $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

.2.6 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

บทนิยาม ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง I ถ้าสำหรับสองจำนวน x_1, x_2 ใด ๆ ในช่วง I ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง I ถ้าสำหรับสองจำนวน x_1, x_2 ใด ๆ ในช่วง I ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x)_1 > f(x_2)$

กฎข้อที่ 1 f สามารถหาอนุพันธ์ได้ในช่วง (a, b)

ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ x ใน (a, b)

แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (a, b)

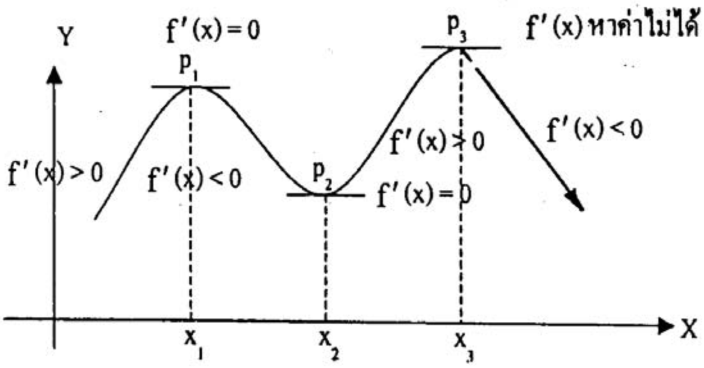
ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ x ในช่วง (a, b)

แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง (a, b)

.2.7 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

บทนิยาม ฟังก์ชัน f จะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$ ถ้ามีช่วงเปิด (a , b) ซึ่ง $x_0 \in (a , b)$ และ $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a , b)$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(x_0)$
ฟังก์ชัน f จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$ ถ้ามีช่วงเปิด (a , b) ซึ่ง $x_0 \in (a , b)$ และ $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a , b)$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(x_0)$

พิจารณากราฟ

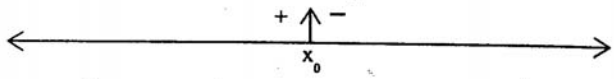


กฎข้อที่ 2 ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์เมื่อ $x = x_0$ และ $x_0 \in D_f$ แล้ว $f'(x_0) = 0$ หรือ $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้

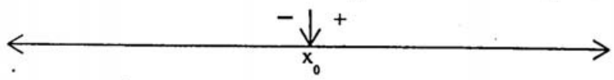
บทนิยาม ถ้า x_0 อยู่ในโดเมนของ f โดยที่ $f'(x_0) = 0$ หรือ $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้ แล้วจะเรียก x_0 ว่าค่าวิกฤติ (Critical value) ของ f ถ้า x_0 เป็นค่าวิกฤติของ f แล้วเรียกจุด $(x_0 , f(x_0))$ ว่าจุดวิกฤติ (Critical point)

กฎข้อที่ 3 สมมติ f ต่อเนื่องบนช่วงเปิด ซึ่งมีค่าวิกฤติ x_0 ของ f และพิจารณา $f'(x)$ บนช่วงเว้นแต่ที่ $x = x_0$

(1) ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจาก + เป็น - ผ่าน x_0 แล้ว f จะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เมื่อ $x = x_0$



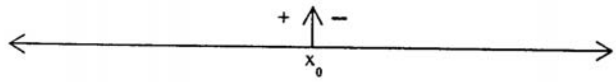
(2) ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจาก - เป็น + ผ่าน x_0 แล้ว f จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เมื่อ $x = x_0$



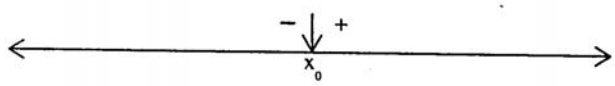
(3) ถ้า $f'(x)$ ไม่เปลี่ยนแปลงแล้ว f ไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์เมื่อ $x = x_0$

สรุปการตรวจสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่ 1

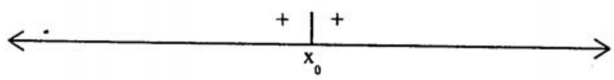
1. หา $f'(x)$
2. หาค่า x_0 ที่ทำให้ $f'(x_0) = 0$ หรือ $f'(x_0)$ ไม่นิยาม (x_0 เป็นค่าวิกฤติ)
3. กำหนดค่าของ x_0 ในขั้นที่ 2 บนเส้นจำนวน พิจารณา $f'(x_0) > 0$ หรือ $f'(x_0) < 0$



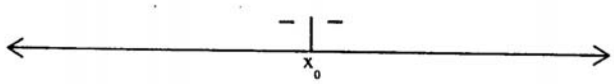
สูงสุดสัมพัทธ์



ต่ำสุดสัมพัทธ์



ไม่มี



ไม่มี

การตรวจสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่ 2

สมมติให้ $f'(x_0) = 0$ หรือ $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้ (x_0 เป็นค่าวิกฤติ)

(1) ถ้า $f''(x_0) < 0$ จะได้ $x = x_0$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(x_0)$

(2) ถ้า $f''(x_0) > 0$ จะได้ $x = x_0$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(x_0)$

(3) ถ้า $f''(x_0) = 0$ สรุปไม่ได้ ต้องพิจารณาโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่ 1

3 การอินทิเกรต (Integration)

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้ และ F เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เท่ากับ f นั่นคือ $F'(x) = f(x)$

บทนิยาม เรียกฟังก์ชัน F ซึ่ง $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x ว่าเป็น "ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f"

ข้อสังเกตของปฏิยานุพันธ์ของ f(x)

1. ทุก ๆ ฟังก์ชัน f ที่มีความต่อเนื่อง จะมีปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f เป็นจำนวนไม่จำกัด
2. ถ้า $F_1(x)$, $F_2(x)$ ต่างเป็นปฏิยานุพันธ์ของ f(x) ความแตกต่างของ $F_1(x)$ และ $F_2(x)$ คือค่าคงตัว
   $F_1(x) - F_2(x) = c$
3. ถ้า F(x) เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f(x)
   จะได้ว่า $F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว จะเป็นปฏิยานุพันธ์ f(x) ด้วย
   จึงเขียนปฏิยานุพันธ์ทั้งหมดของ f(x) เป็น $F(x) + c$

.3.1 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral)

บทนิยาม การหาปฏิยานุพันธ์ทั้งหมดของ f(x) เรียกว่า การอินทิเกรต $f(x) \xrightarrow{\text{อินทิเกรต}} F(x) + c$ โดยที่ $F'(x) = f(x)$

เขียนสัญลักษณ์แทนการหาปฏิยานุพันธ์ของ f(x) ได้เป็น $\int f(x)\,dx$ ดังนั้น $\int f(x)\,d(x) = F(x) + c$, c เป็นค่าคงตัว

กระบวนการที่ได้มาซึ่งปฏิยานุพันธ์ทั้งหมดของ f เรียกว่า การอินทิเกรต

สูตรการอินทิเกรต

เมื่อ k และ c เป็นค่าคงตัว

(1) $\int dx = x + c$

(2) $\int k\,dx = kx + c$

(3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\,,\ n \neq -1$

(4) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

(5) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

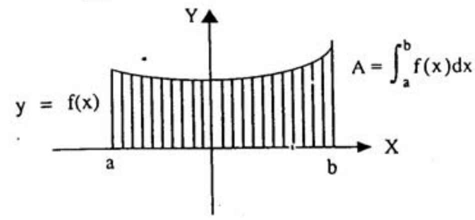
ถ้า $\frac{dy}{dx} = f(x)$ แล้ว $\int \left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \int f(x)dx$ ดังนั้น $y = \int f(x)dx$

`.3.2 พื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง

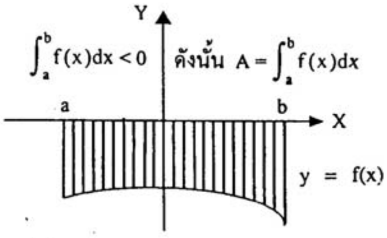
ถ้าฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ แต่พื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ และแกน X ในช่วง $x = a$ และ $x = b$ สามารถหาได้ดังนี้

ตัวอย่างการหาพื้นที่ ให้ A เป็นพื้นที่ส่วนที่ต้องการหา และ $f(x) \geq 0$ หรือ $f(x) \leq 0$

(1)

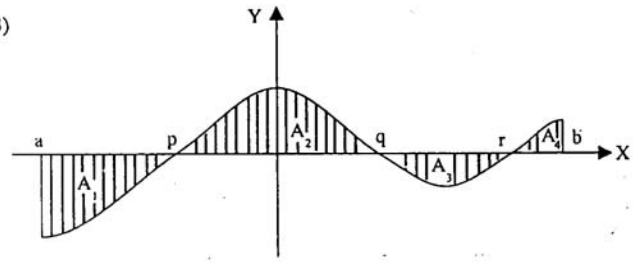


(2)



ดังนั้น $A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

(3)



อินทิกรัลจำกัดเขตเหนือแกน X มีเครื่องหมาย +

อินทิกรัลจำกัดเขตใต้แกน X มีเครื่องหมายเป็น -

ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ และแกน X ในช่วง $x = a$ และ $x = b$

คือ $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

$$A_1 = \left|\int_a^p f(x)dx\right| \qquad A_2 = \left|\int_p^q f(x)dx\right|$$

$$A_3 = \left|\int_q^r f(x)dx\right| \qquad A_4 = \left|\int_r^b f(x)dx\right|$$

ดังนั้น $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

.3.3 อินทิกรัลจำกัดเขต

ทฤษฎีบท	อินทิกรัลจำกัดเขตของ f ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ฟังก์ชันหนึ่งของ f จะได้ว่า $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ หรือ $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

กฎเบื้องต้นของอินทิกรัลจำกัดเขต

(1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, k เป็นค่าคงที่

(2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx \quad = \quad -\int_b^a f(x)dx$

(4) $\int_a^a f(x)dx \quad = \quad 0$

(5) ถ้า $c \in [a, b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

ข้อสังเกต

1. ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ จะมี $\int_a^b f(x)dx$ เสมอ
2. ถ้า $\{x \in [a, b] \mid f$ ไม่มีความต่อเนื่องที่ $x\}$ เป็นเซตจำกัด และ f มีขอบเขตบน $[a, b]$ แล้วจะมี $\int_a^b f(x)dx$
3. การใช้ตัวแปร x ใน $\int_a^b f(x)dx$ ไม่มีความสำคัญใด ๆ ทั้งสิ้น อาจใช้อักษรตัวอื่นแทน x ได้ เช่น $\int_a^b f(t)dt$ หรือ $\int_a^b f(z)dz$ เป็นต้น

การหาอินทิกรัลจำกัดเขตจะง่ายขึ้น ถ้าใช้ทฤษฎีบนพื้นฐานของอินทิกรัลแคลคูลัส

แบบฝึกประสบการณ์แคลคูลัส

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (Ent. คณิตศาสตร์ 1 1/2544)

เฉลย 0.5

. กำหนดให้ $f(x) = ax^3 - 4x^2 + 1$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว และ

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{เมื่อ } x > 1 \\ f'(x) & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$$

ถ้า g(x) มีลิมิตที่ 1 แล้ว a เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 1 2/2543)

1. 0 2. $\frac{5}{2}$ 3. $\frac{8}{3}$ 4. 3

2. ถ้า $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x > 1 \\ x-1 & \text{เมื่อ } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \le 0 \end{cases}$

แล้ว $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x^2) + \lim\limits_{x \to 1^+} \left[\dfrac{f(x-1)}{x+2}\right]$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 1 1/2543)

1. $-\frac{4}{3}$ 2. -1 3. 0 4. $\frac{1}{3}$

3. ให้ $f(x) = 2 - |x^3 - 3|$, $g(x) = x^3$ และ $F(x) = f(g^{-1}(x))$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. = $\lim\limits_{x \to 3^-} F(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} F(x)$

ข. = $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{F(x)-F(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{F(x)-F(3)}{x-3}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก (Ent. คณิตศาสตร์ กข. 2537)

1. ทั้ง ก. และ ข. ถูก 2. ก. ถูก ข. ผิด
3. ก. ผิด ข. ถูก 4. ทั้ง ก. และ ข. ผิด

4. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3x+1} & \text{เมื่อ } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 1 \\ \dfrac{2-\sqrt{5-x}}{x-1} & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 1 1/2541)

ก. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

ข. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

6. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2} & \text{เมื่อ } x \le -1 \\ \frac{2x^2+x-1}{2(x+1)} & \text{เมื่อ } -1 < x \le 1 \\ \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 1 1/2542)

ก. f ต่อเนื่องที่จุด $x = -1$ ข. f ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก. ถูก , ข. ถูก
2. ก. ถูก , ข. ผิด
3. ก. ผิด , ข. ถูก
4. ก. ผิด , ข. ผิด

7. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่ $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{4 - x^2}$ เมื่อ $x \neq \pm 2$ และ $f(2) = a$, $f(-2) = b$ แล้ว a และ b เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 1 2/2542)

1. $a = 1 , b = -3$
2. $a = 1 , b = 3$
3. $a = -1 , b = -3$
4. $a = -1 , b = 3$

8. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} g(x) & , x \le 1 \\ \frac{x^3-1}{x^2-1} & , x > 1 \end{cases}$

ถ้า f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แล้วค่าของ $\lim\limits_{x \to 1^-} (x+3)g(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. 3
3. 6
4. 9

9. กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{3x^{\frac{7}{3}} - 12x^{\frac{5}{3}} - 24x^{\frac{4}{3}}}{x^2}$

ค่าของ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อ $x = 8$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3

10. ให้ $f(x) = x^3 - x^2 + g(x)$ และ $f''(2) = f(2) = 2$

$\left(\frac{g}{f}\right)'(2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 1 2/2543)

1. -2
2. $\frac{1}{2}$
3. 0
4. 2

11. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ $f(3) = -2$ $f'(3) = 5$

ถ้า $g(x) = \frac{f(x)}{x^2+1}$ แล้ว $g'(3)$ มีค่าเท่าใด (Ent. คณิตศาสตร์ 1 1/2542)

12. กำหนดให้ $y = f(x)$ ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x เท่ากับ $kx^3 - 10x + 6$ เมื่อ x มีค่าใด ๆ และ k เป็นค่าคงตัวและ $f(0) = 1$, $f'(1) = 0$ แล้ว $f(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ กข. 2535)

1. 10 2. 6 3. -9 4. -13

13. กำหนดให้ $f(x) = ax^3 + x^2 + x + b$ เมื่อ a , b เป็นจำนวนจริง และ $f(1) = 3$, $f'(1) = 0$ ถ้า $g(x) = f''(x)$ แล้ว $(gof)(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 1 1/2543)

1. -16 2. -4 3. 4 4. 16

14. เส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{3x^3}$ ที่ $x = 1$ มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 2 2/2543)

1. $y - \frac{8}{3} = 2(x - 1)$ 2. $y - \frac{10}{3} = 2(x - 1)$

3. $y - \frac{8}{3} = -2(x - 1)$ 4. $y - \frac{10}{3} = -2(x - 1)$

15. ถ้าเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = (x - 1)^2 \left(2x - \frac{5}{4}\right)$ ที่จุด $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$ ทำมุม θ กับแกน X โดยที่ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\sin^2\frac{\theta}{2}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (Ent. คณิตศาสตร์ 1 1/2544)

16. ถ้าต้องการให้กราฟของ $y = x^2 - 5x + k$ สัมผัสกับแกน X ค่าของ k มีค่าเท่ากับเท่าใด (Ent. คณิตศาสตร์ 2 1/2541)

17. กำหนดให้กราฟของ $y = x^4 + ax^3 + bx^2$ มีเส้นสัมผัสขนานกับแกน X ที่จุด $x = -2, 0, 1$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 2 1/2543)

1. $\frac{-5}{3}$ 2. $\frac{5}{3}$ 3. $\frac{8}{3}$ 4. $\frac{-8}{3}$

18. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + cx^2 - 9x$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง ถ้าค่าวิกฤติค่าหนึ่งของ f คือ 1 แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดในเซตใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 1 1/2543)

1. $(-3, 1)$ 2. $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$

3. $(-1, 4)$ 4. $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

19. กำหนดให้ $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 16)$ และ $A = \{x \in R \mid f'(x) > 0\}$ ดังนั้น A คือเซตในข้อใด (Ent. คณิตศาสตร์ กข. 2539)

1. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ 2. $(-2, 0) \cup (2, \infty)$

3. $(-\infty, -2)$ 4. $(2, \infty)$

20. กำหนดให้ $f(x) = ax^3 + bx$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -2 ที่จุด $x = 1$ ถ้า $g(x) = x^3 + f'(x)$ แล้ว g เป็นฟังก์ชันลดในช่วงใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 1 1/2544)

1. $(0, 2)$ 2. $(-3, -1)$

3. $(-1, 1)$ 4. $(-2, 0)$

21. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีกราฟผ่านจุด $(0, 2)$ และ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ แล้วค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 1 2/2542)

1. 2 2. 3 3. 6 4. 8

22. ถ้าวัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ เป็น $24t^2$ เมตร/(วินาที)^2 และขณะเวลาเป็น $t = 1$ วินาที มีความเร็ว 16 เมตร/วินาที และเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 8 เมตร แล้วเมื่อเวลา $t = 2$ วินาที วัตถุจะเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่าไร (Ent. คณิตศาสตร์ กข. 2540)

23. กำหนดให้ a , b , c , d เป็นจำนวนจริง และ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ โดยที่ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เป็น 2 ที่ $x = 1$ แล้ว $f''(1) = -4$ ถ้า $f(0) = 1$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุดในข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 1 1/2542)

1. $x = -3$ 2. $x = -\frac{1}{3}$ 3. $x = \frac{1}{3}$ 4. $x = 3$

24. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$ เมื่อ b , c เป็นจำนวนจริงถ้า $x = -2$ เป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f และ $f''(-1) = 6$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก (Ent. คณิตศาสตร์ กข. 2538)

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม 2. f เป็นฟังก์ชันลด
3. $x = -2$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ 4. $x = -1$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

25. ถ้า $\int_1^{\sin\theta} x^2 dx = \frac{-2}{3}$ แล้ว $1 + \sin\theta + \cos\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ กข. 2540)

1. 2 2. 1 3. 0 4. -1

26. กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีกราฟเป็นเส้นตรงตัดแกน X ที่จุด $(-1, 0)$ และผ่านจุด $(3, 6)$ ค่าของ $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ กข. 2539)

1. 9 2. 12 3. 15 4. 18

27. ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งอนุพันธ์ของ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0, 1]$ และ $g(x) = \frac{f(x)}{x^4 + 1}$ ถ้า $f(1) = f'(1) = 1$ และ $f(0) = f'(0) = 2$ แล้ว $\int_0^1 g''(x)dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 1 1/2544)

1. $-\frac{5}{2}$ 2. $-\frac{1}{2}$
3. $\frac{3}{2}$ 4. $\frac{7}{2}$

28. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[1, 3]$ โดยที่ $f(x) = g(x) + x - 1$ และ $g(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in [1, 3]$ พิจารณาข้อความ

ก. $\int_1^3 f(x)dx \geq 2$ ข. $\int_1^3 (f(x) - g(x))^2 dx \geq \frac{8}{3}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (Ent. คณิตศาสตร์ กข. 2541)

1. ก. และ ข. ถูกทั้งคู่ 2. ก. และ ข. ผิดทั้งคู่
3. ก. ถูก แต่ ข. ผิด 4. ก. ผิด แต่ ข. ถูก

29. ถ้าเส้นโค้ง $y = f(x)$ มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันที่จุด (x , y) ใด ๆ บนเส้นโค้งเป็น $2x - 1$ และเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1 , 2)$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $x + 2y - 1 = 0$ แล้วความชันของเส้นโค้งนี้ที่จุด $x = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ กข. 2540)

1. -2
2. 0
3. 1
4. 2

30. ถ้า $g(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - x^2 + 5)$

และ $h(x) = \frac{d\sqrt{x}}{dx}$ แล้ว

$\int[g(x) \cdot h(x)]dx$ คือข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 2 2/2543)

1. $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$
2. $x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + C$
3. $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} + C$
4. $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + C$

31. กำหนดให้ $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x - 2$ เมื่อ a , b เป็นจำนวนจริง

ถ้า $f'(1) = 5$ และ $f''(0) = -12$

แล้ว $\int(f'(x) + f''(x))dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 1 1/2544)

1. $5x^3 + 9x^2 - 10x + c$
2. $5x^3 + 9x^2 + 10x + c$
3. $5x^3 - 9x^2 + 10x + c$
4. $5x^3 - 9x^2 - 10x + c$

32. ถ้า $\int(fog)(x)dx = x^2 + 5x + c$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัว และ $f(x) = 4x - 3$ แล้ว ค่าของ $\int_0^1 g(x)dx$ เท่ากับเท่าใด (Ent. คณิตศาสตร์ กข. 2539)

33. พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^3 - 3x + 2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 2$ เฉพาะส่วนทีอยู่เหนอแกน X เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 1 1/2541)

1. $\frac{3}{2}$ ตารางหน่วย
2. $\frac{1}{6}$ ตารางหน่วย
3. $\frac{2}{3}$ ตารางหน่วย
4. $\frac{5}{6}$ ตารางหน่าย

34. ให้ b , c เป็นจำนวนจริง

ถ้าเส้นโค้ง $y = x^2 + bx + c$ มีจุด $(-1 , -4)$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ แล้วพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้ และส่วนของแกน X จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ กข. 2541)

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{4}{3}$
3. $\frac{16}{3}$
4. $\frac{32}{3}$

เฉลยแบบฝึกเสริมประสบการณ์ แคลคูลัส

1.	0.5	18.	1
2.	2	19.	2
3.	1	20.	4
4.	2	21.	3
5.	2	22.	46
6.	1	23.	2
7.	4	24.	1
8.	3	25.	3
9.	2	26.	2
10.	1	27.	3
11.	0.62	28.	1
12.	3	29.	4
13.	1	30.	1
14.	3	31.	3
15.	0.1	32.	2.25
16.	6.25	33.	4
17.	4	34.	3