



คณิตศาสตร์

(ฟังก์ชันตรีโกณมิติ)

อ.มนตรี นีรมิตศิริพงศ์

(เดอะ เบรน)

โครงการชีวเข้มแข็งเข้มแข็ง ความรู้

วิชา คณิตศาสตร์

ตะลุยโจทย์พีชคณิต PAT 1 เพื่อน้องๆ ม.6
เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

โดย พี่ข้าง (เดอะ เบรน)
อ.มนตรี นิรมิตศิริพงศ์

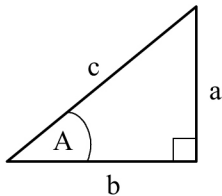


www.thebrain.co.th |



www.facebook.com/TheBrain.FanClub

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ



- a เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุม A (ข้าม)
- b เรียกว่า ด้านประชิดมุม A (ชิด)
- c เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก (ฉาก)

1. $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $\tan A = \frac{a}{b}$

2. $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\cos A \neq 0$

3. $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$, $\sin A \neq 0$

4. $\sin A = \cos(90^\circ - A)$, $\sec A = \csc(90^\circ - A)$, $\tan A = \cot(90^\circ - A)$

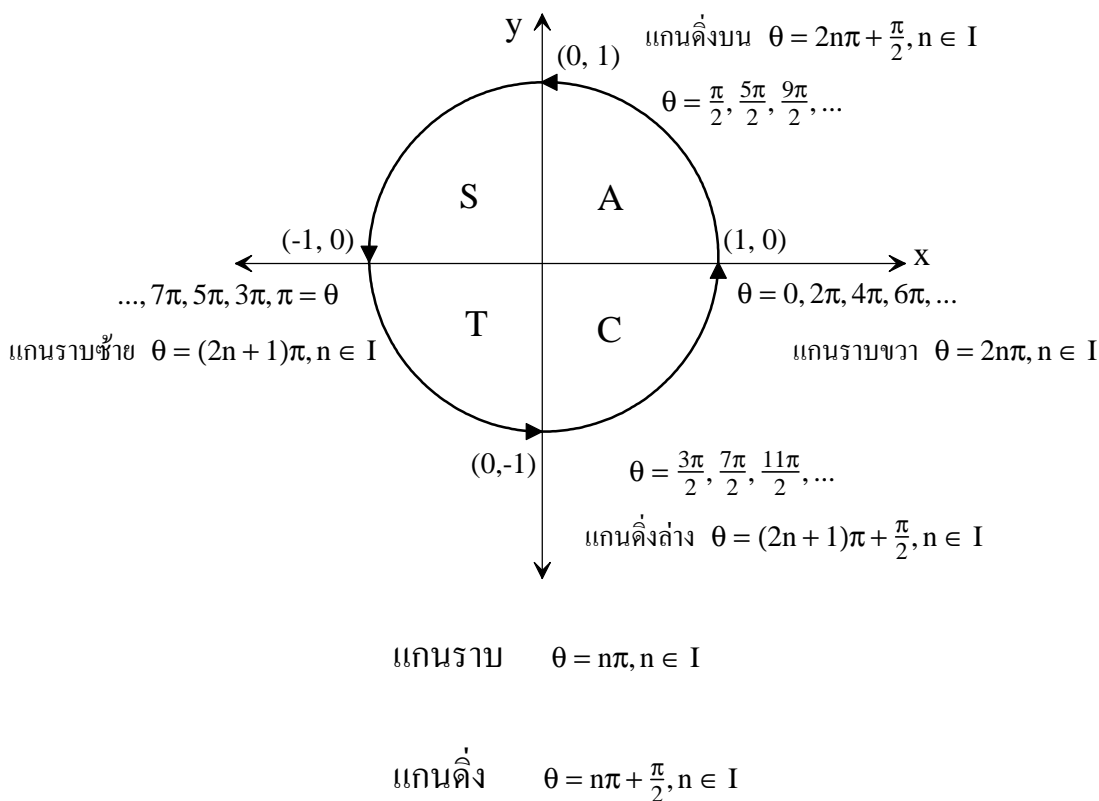
5. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$, $\csc^2 A - \cot^2 A = 1$

6.

	30°	45°	60°
sin	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



วงกลมหนึ่งหน่วย



ฟังก์ชันของมุมรอบจุดศูนย์กลาง (circular function)

1. ถ้าเป็นมุมแกนราบใช้สูตร

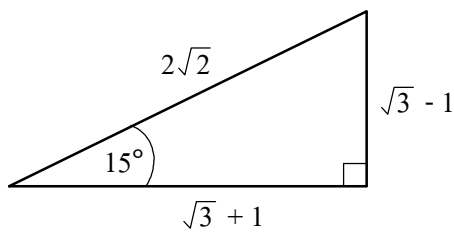
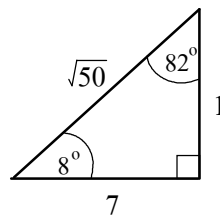
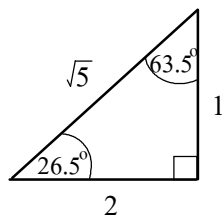
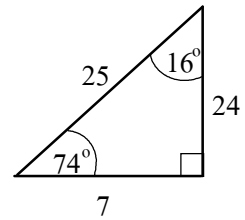
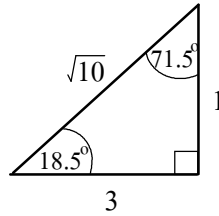
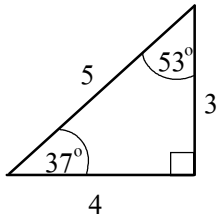
$$\text{fnTri} [\text{แกนราบ} \pm \theta] = \text{fnTri} [\theta]$$
2. ถ้าเป็นมุมแกนดิ่งใช้สูตร

$$\text{fnTri} [\text{แกนดิ่ง} \pm \theta] = \text{Co-fnTri} [\theta]$$

เครื่องหมายให้ คูตัวเดิม



*** ฝึกภาพจำแบบจุดดรี



$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$$

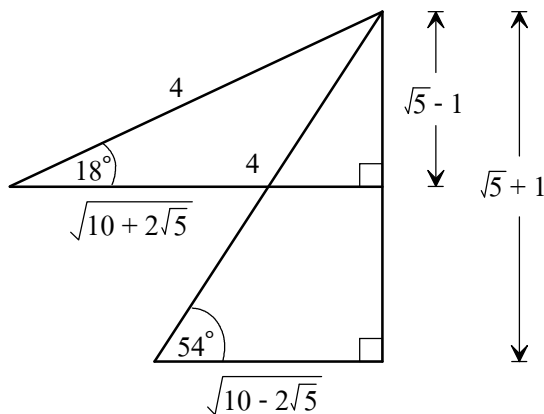
$$\cot 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\sin 22.5^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\tan 22.5^\circ = \sqrt{2} - 1$$

$$\cos 22.5^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$\cot 22.5^\circ = \sqrt{2} + 1$$





FORMULAS

มุมประกอบ (Compound Angle)

$$1. \quad \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad , \quad \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$2. \quad \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad , \quad \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$3. \quad \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \quad , \quad \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$4. \quad \cot(A + B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A} \quad , \quad \cot(A - B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

มุม 2 เท่า (DOUBLE ANGLE)

$$5. \quad \sin 2A = 2 \sin A \cos A \\ = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$6. \quad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \\ = 2 \cos^2 A - 1 \\ = 1 - 2 \sin^2 A \\ = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$7. \quad \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$8. \quad \cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}$$



มุม 3 เท่า (TRIPLE ANGLE)

$$9. \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$10. \cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$11. \tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

$$12. \cot 3A = \frac{3 \cot A - \cot^3 A}{1 - 3 \cot^2 A}$$

ผลบวก , ผลต่าง , และผลคูณ (SUM , DIFFERENCE , AND PRODUCT)

$$13. \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{(A+B)}{2} \cos \frac{(A-B)}{2}$$

$$14. \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{(A+B)}{2} \sin \frac{(A-B)}{2}$$

$$15. \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{(A+B)}{2} \cos \frac{(A-B)}{2}$$

$$* 16. \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{(A+B)}{2} \sin \frac{(A-B)}{2}$$

$$17. 2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$$

$$18. 2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$$

$$19. 2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

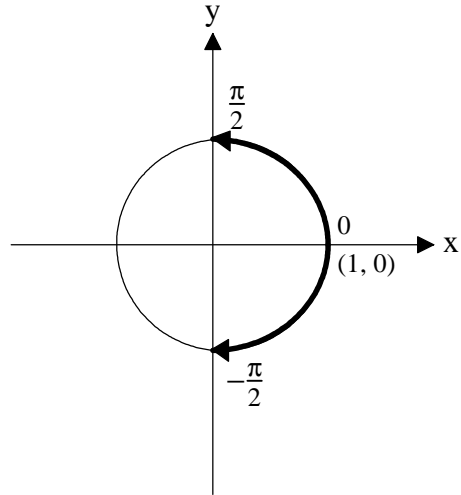
$$* 20. 2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$



อินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณมิติ

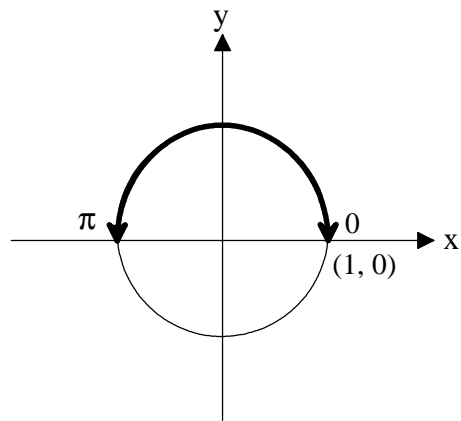
$$y = \arcsin x, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

**** สรุป** $\sin^{-1}x + \sin^{-1}(-x) = 0$
 $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$



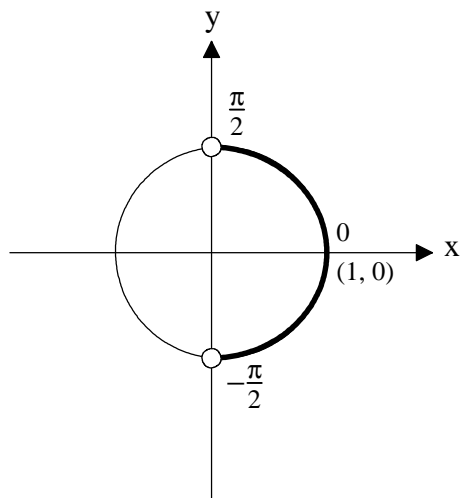
$$y = \arccos x, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi$$

**** สรุป** $\cos^{-1}x + \cos^{-1}(-x) = \pi$
 $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$



$$y = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

**** สรุป** $\tan^{-1}x + \tan^{-1}(-x) = 0$
 $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$





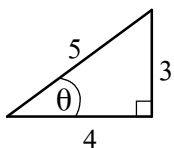
กฎการสลาย

1. $\sin (\sin^{-1} x) = x, x \in [-1, 1]$
 $\sin^{-1} (\sin x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\cos (\cos^{-1} x) = x, x \in [-1, 1]$
 $\cos^{-1} (\cos x) = x, x \in [0, \pi]$
3. $\tan (\tan^{-1} x) = x, x \in \mathbb{R}$
 $\tan^{-1} (\tan x) = x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

กฎการยุบ arc

1. $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ เมื่อ $xy < 1$
2. $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + \pi$ เมื่อ $xy > 1, x > 0$ และ $y > 0$
3. $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} - \pi$ เมื่อ $xy > 1, x < 0$ และ $y < 0$
4. $\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$ เมื่อ $xy > 0$

กฎการเปลี่ยน arc



$$\theta = \arcsin \frac{3}{5} = \arccos \frac{4}{5} = \arctan \frac{3}{4} = \operatorname{arccot} \frac{4}{3} = \operatorname{arcsec} \frac{5}{4} = \operatorname{arccsc} \frac{5}{3}$$

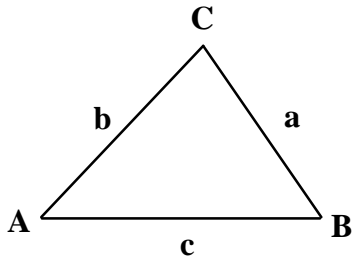
สมบัติเพิ่มเติม

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$
2. $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$
3. $\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2}$
4. $\arcsin x = \operatorname{arccsc} \frac{1}{x}$
5. $\arccos x = \operatorname{arcsec} \frac{1}{x}$
6. $\arctan x = \operatorname{arccot} \frac{1}{x}, x > 0$



การแก้สามเหลี่ยม
ระยะทางและความสูง

กฎของ sine (LAW of sine)

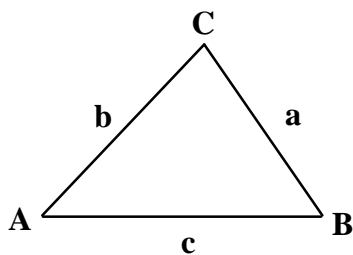


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

บทประยุกต์ $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

กฎของ cosine (LAW of cosine)

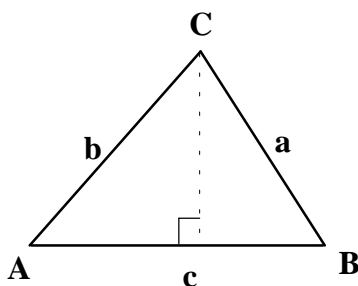


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

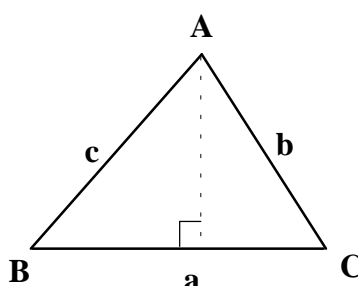
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

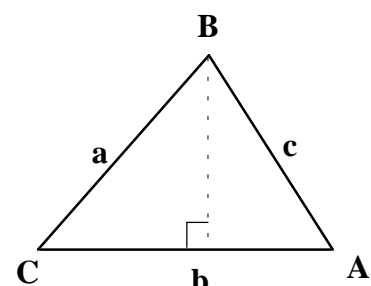
กฎของโปรเจกชัน (LAW of Projection)



$$b \cos A + a \cos B = c$$



$$c \cos B + b \cos C = a$$



$$a \cos C + c \cos A = b$$



เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} + \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} + \frac{\tan x}{\sqrt{\sec^2 x - 1}} + \frac{\cot x}{\sqrt{\csc^2 x - 1}}$$

เมื่อ x เป็นจำนวนจริงทุกตัวในโดเมนของฟังก์ชัน มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -4 2. -2 3. 2 4. 4

2. ถ้า θ เป็นมุมที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 และ $3\cos\theta - 4\sin\theta = 2$ แล้ว

ค่าของ $3\sin\theta + 4\cos\theta$ มีค่าอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. (1, 2] 2. (2, 3] 3. (3, 4] 4. (4, 5]



3. กำหนดให้ A, B, C และ D เป็นจำนวนในช่วง $[0, \pi]$ โดยที่

$$\sin A + 7 \sin B = 4(\sin C + 2 \sin D)$$

$$\cos A + 7 \cos B = 4(\cos C + 2 \cos D)$$

ค่าของ $\frac{\cos(A-D)}{\cos(B-C)}$ เท่ากับเท่าใด

4. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $\sin A = \frac{3}{5}$ และ $\cos B = \frac{5}{13}$

ค่าของ $\cos C$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 54)

1. $\frac{16}{65}$

2. $-\frac{16}{65}$

3. $\frac{48}{65}$

4. $-\frac{33}{65}$



5. ถ้า $\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \frac{1}{\cos 2^\circ \cos 3^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos 44^\circ \cos 45^\circ} = \sec A^\circ$ และ $0 < A < 180$
แล้ว A มีค่าเท่ากับเท่าใด

6. กำหนดให้ $0^\circ < \theta < 45^\circ$ และให้
 $A = (\sin \theta)^{\tan \theta}$, $B = (\sin \theta)^{\cot \theta}$, $C = (\cot \theta)^{\sin \theta}$, $D = (\cot \theta)^{\cos \theta}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 55)

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1. $A < B < C < D$ | 2. $B < A < C < D$ |
| 3. $A < C < D < B$ | 4. $C < D < B < A$ |



7. Given that $(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \dots (1 + \tan 45^\circ) = 2^n$, find n .

8. ค่าของ $\log_2(1 + \tan 1^\circ) + \log_2(1 + \tan 2^\circ) + \dots + \log_2(1 + \tan 44^\circ)$ เท่ากับเท่าใด
(PAT 1 มี.ค. 54)



9. ถ้า $1 - \cot 20^\circ = \frac{x}{1 - \cot 25^\circ}$ แล้ว x มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)

10. กำหนดให้ $(1 - \cot 1^\circ)(1 - \cot 2^\circ)(1 - \cot 3^\circ) \dots (1 - \cot 44^\circ) = x$
 x^2 หารด้วย 10 เหลือเศษเท่ากับเท่าใด



11. ถ้า $\cos \theta - \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ แล้ว $\sin 2\theta$ มีค่าตรงกับข้อใด (PAT 1 มี.ค. 52)

1. $\frac{4}{13}$

2. $\frac{9}{13}$

3. $\frac{4}{9}$

4. $\frac{13}{9}$

12. ถ้า $\sin 15^\circ$ และ $\cos 15^\circ$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2 + ax + b = 0$

แล้ว ค่าของ $a^4 - b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)

1. -1

2. 1

3. 2

4. $1 + 3\sqrt{2}$

Suppose the roots of the quadratic equation $x^2 + ax + b = 0$ are $\sin 15^\circ$ and $\cos 15^\circ$

What is the value of $a^4 - b$?



13. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม A และมุม B เป็นมุมแหลม

ถ้า $\cos 2A + 3 \cos 2B = -2$ และ $\cos A - \sqrt{2} \cos B = 0$

แล้ว $\cos C$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (รับตรง ม.ค. 55)

1. $\frac{1}{5}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ 2. $\frac{1}{5}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ 3. $\frac{1}{5}(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$ 4. $\frac{1}{5}(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$

5. $\frac{1}{5}(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$

14. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cot^3 x - 1) \operatorname{cosec}^2 x}{1 + \cos 2x - 2 \sin^2 x}$ (PAT 1 มี.ค. 55)



15. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับสมการ

$$5(\sin a + \cos a) + 2 \sin a \cos a = 0.04$$

ค่าของ $125(\sin^3 a + \cos^3 a) + 75 \sin a \cos a$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)

16. ค่าของ $12 \cot 9^\circ (4 \cos^2 9^\circ - 3)(4 \cos^2 27^\circ - 3)$ เท่ากับเท่าใด



17. จงหาค่าของ $2 \sin^2 60^\circ (\tan 5^\circ + \tan 85^\circ) - 12 \sin 70^\circ$ (PAT 1 มี.ค. 55)

18. ค่าของ $\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ \tan 18^\circ + \cos 36^\circ}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)



19. ค่าของ $\frac{\tan 20^\circ + 4 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 54)

20. Suppose that a and b is a non-zero real number for which

$\sin x + \sin y = a$ and $\cos x + \cos y = b$, What is the value of $\sin (x + y)$?

1. $\frac{2ab}{a^2 - b^2}$ 2. $\frac{2ab}{a^2 + b^2}$ 3. $\frac{a^2 - b^2}{2ab}$ 4. $\frac{a^2 + b^2}{2ab}$ 5. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$



21. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \operatorname{cosec} 10^\circ & \sqrt{3} \\ \sec 10^\circ & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos^2 70^\circ & \sin 40^\circ \\ 0 & \cos^2 50^\circ \end{bmatrix}$ และ

$$C = \begin{bmatrix} \cos^2 20^\circ & 0 \\ \sin 80^\circ & \cos^2 10^\circ \end{bmatrix}$$

ค่าของ $\det[A(B+C)]$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)



22. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $2 \sin 2^\circ, 4 \sin 4^\circ, 6 \sin 6^\circ, \dots, 180 \sin 180^\circ$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $\cot 1^\circ$ 2. $\csc 1^\circ$ 3. $\cot 2^\circ$ 4. $\csc 2^\circ$ 5. $\tan 1^\circ$

23. ถ้า $3 \tan A = \tan(A+B)$ แล้วค่าของ $\frac{\sin(2A+B)}{\sin B}$ มีค่าเท่าใด



24. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\arcsin(x+y) + \arccos(x-y) = \frac{3\pi}{2}$

ดังนั้น $\arcsin y + \arccos x$ มีค่าอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[-\frac{\pi}{2}, 0)$

2. $[0, \frac{\pi}{2}]$

3. $(\frac{\pi}{2}, \pi]$

4. $(\pi, \frac{3\pi}{2}]$

25. ถ้า $\arcsin 5x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ แล้วค่าของ $\tan(\arcsin x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

(PAT 1 ก.ค. 52)

1. $\frac{1}{5}$

2. $\frac{1}{3}$

3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

4. $\frac{1}{2}$



26. ถ้า $(\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3) = K(\arctan 1 + \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3})$

แล้ว K มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2

2. 3

3. 4

4. 5

27. ค่าของ $\frac{\tan[\arccot \frac{1}{5} - \arccot \frac{1}{3} + \arctan \frac{7}{9}]}{\sin[\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13}]}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)



28. ค่าของ $\cot(\operatorname{arc} \cot 7 + \operatorname{arc} \cot 13 + \operatorname{arc} \cot 21 + \operatorname{arc} \cot 31)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

(PAT 1 มี.ค. 54)

1. $\frac{11}{4}$

2. $\frac{13}{4}$

3. $\frac{9}{2}$

4. $\frac{25}{2}$

29. ค่าของ $\tan(\operatorname{arc} \cot 3 + \operatorname{arc} \cot 7 + \operatorname{arc} \cot 13 + \operatorname{arc} \cot 21 + \operatorname{arc} \cot 31 + \operatorname{arc} \cot 43)$

เท่ากับเท่าใด



30. ค่าของ $\cot \left[\sum_{n=1}^{10} \arctan \frac{1}{2n^2} \right]$ เท่ากับเท่าใด

31. กำหนดให้ $C = \arcsin \frac{3}{5} + \arccot \frac{5}{3} - \arctan \frac{8}{19}$

ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\arccot \frac{1}{2x} + \arccot \frac{1}{3x} = C$

แล้วผลคูณของสมาชิกในเซต A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 54)

1. $-\frac{1}{4}$

2. $\frac{1}{4}$

3. $-\frac{1}{6}$

4. $\frac{1}{6}$



32. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\arccos(x) = \arccos(x\sqrt{3}) + \arccos(\sqrt{1-x^2})$

และให้ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\arccos(x) = \arcsin(x) + \arcsin(1-x)$

จำนวนสมาชิกของเซต $P(A-B)$ เท่ากับเท่าใด เมื่อ $P(S)$ แทนเพาเวอร์เซตของเซต S

(PAT 1 มี.ค. 55)



33. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$3 \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 4 \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + 2 \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

แล้วจำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับเท่าใด

34. ถ้า $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ และ $\tan^2\theta + 4\tan\theta - 1 = 0$ แล้ว $\tan[\arccos(\sin 4\theta)]$ มีค่าเท่าใด



35. $\sec^2(2 \tan^{-1} \sqrt{2})$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (รับตรง ม.ค. 55)

36. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาว $2x+3$, x^2+3x+3 , x^2+2x ตามลำดับ แล้วมุมที่ใหญ่ที่สุดของสามเหลี่ยมนี้มีขนาดกี่องศา



37. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมโดยมี a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ ถ้ามุม C เท่ากับ 60° $b = 5$ และ $a - c = 2$ แล้วความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 55)
1. 25 2. 29 3. 37 4. 45

38. กำหนดให้ A, B และ C เป็นมุมของรูปสามเหลี่ยมโดยที่
- $$(\sin A - \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B + \sin C) = 3 \sin A \sin C$$
- จงหาค่าของ $\sqrt{3 \sec^2 B + 3 \operatorname{cosec}^2 B}$ (PAT 1 ต.ค. 54)



39. รูปสามเหลี่ยม ABC มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a หน่วย, b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ

ถ้า $a^2 + b^2 = 49c^2$ แล้ว ค่าของ $\frac{\cot C}{\cot A + \cot B}$ เท่ากับเท่าใด

40. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ มีความยาวตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c หน่วยตามลำดับ

ถ้า $a^2 + b^2 = 31c^2$ แล้วค่าของ $3 \tan C(\cot A + \cot B)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)



41. รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้าน a, b, c เป็นด้านตรงข้ามมุม A, B, C ซึ่งมีความยาวเป็น 3, 2.5, 1 ตามลำดับค่าของ $b\cos C + c\cos B$ เท่ากับเท่าใด

42. กำหนดสามเหลี่ยม ABC มี A และ B เป็นมุมแหลม ถ้า $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{5}{13}$ ด้าน a ยาว 13 หน่วย ด้าน c ยาวเท่ากับเท่าใด (TEXT BOOK)



43. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมโดยมี a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ
ถ้า $c = 5$ แล้ว ค่าของ $(a-b)^2 \cos^2 \frac{C}{2} + (a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2}$ เท่ากับเท่าใด

44. รูปสามเหลี่ยม ABC มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a หน่วย, b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้ามุม A, B และ C เป็นลำดับเลขคณิต และ $b : c = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ แล้วค่าของ $\tan A + \cot A$ เท่ากับเท่าใด



45. ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใดๆ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ แล้ว $\frac{\cos A}{c \cos B + b \cos C} + \frac{\cos B}{a \cos C + c \cos A} + \frac{\cos C}{b \cos A + a \cos B}$

เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$ 2. $\frac{(a+b+c)^2}{abc}$ 3. $\frac{(a+b+c)^2}{2abc}$ 4. $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$

46. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม โดยที่มุม $B = \frac{\pi}{2} + A$

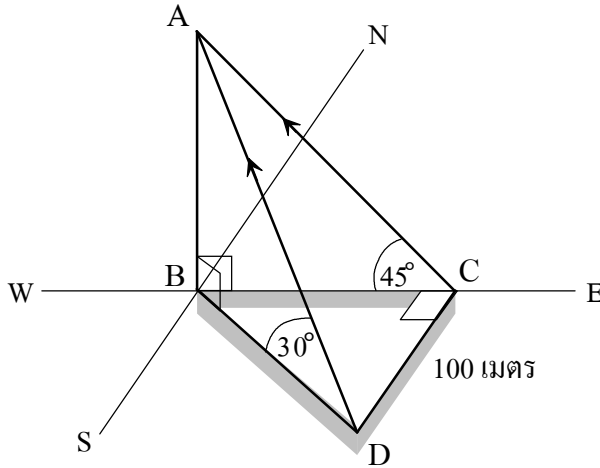
และ $BC = x$, $AC = y$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข $x^y = y^x$ และ $y = x^2$

แล้ว $\cos 2A$ มีค่าเท่าใด



99. พี่ช้างยืนอยู่ทางทิศตะวันออกของตึกหลังหนึ่ง มองเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 45° จากจุดนี้ พี่ช้างเดินไปทิศใต้เป็นระยะ 100 เมตร จะมองเห็นยอดตึก (ที่ตำแหน่งเดิม) เป็นมุมเงย 30° ความสูงของตึกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent)

1. 100 2. $50\sqrt{2}$ 3. $50\sqrt{3}$ 4. $\frac{100}{\sqrt{3}}$



100. พี่เอ๋ยืนอยู่ทางทิศตะวันออกของเสาธงบนสนามแห่งหนึ่งและมองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 60 องศา แต่เมื่อเดินตรงไปทางทิศเหนือเป็นระยะทาง x เมตร พี่เอ๋สามารถมองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงยเพียง 45 องศา ถ้าพี่เอ๋และเสาธงสูง 1.60 เมตร และ 37.60 เมตร ตามลำดับ แล้วค่าของ x^2 อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. (0, 250] 2. (250, 500] 3. (500, 750] 4. (750, 1000]