ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม

โดย อาจารย์ รณชัย มาเจริญทรัพย์

1. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

บทนิยาม ถ้า $a > 0$ และ $a \neq 1$ เรียกฟังก์ชัน $\{(x, y) \in R \times R \mid y = a^x\}$ ว่า ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล (exponential function)

สมบัติของ ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

ถ้า $a > 0$ และ $a \neq 1$ $f = \{(x, y) \mid y = a^x\}$ มีสมบัติดังนี้

1. f เป็น ฟังก์ชัน 1 – 1 จาก ไปทั่วถึง (ไปบน) R^+ นั่นคือ
   1) $D_f = R$
   2) $R_f = R^+$
   3) $a^m = a^n$ ก็ต่อเมื่อ $m = n$
2. ถ้า $a > 1$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม นั่นคือ
   1) ถ้า $m > n$ แล้ว $a^m > a^n$ 2) ถ้า $m < n$ แล้ว $a^m < a^n$
3. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลด นั่นคือ
   1) ถ้า $m > n$ แล้ว $a^m < a^n$ 2) ถ้า $m < n$ แล้ว $a^m > a^n$
4. ถ้า $a > 1$ จะได้ว่า
   1) ถ้า $a^m > a^n$ แล้ว $m > n$ 2) ถ้า $a^m < a^n$ แล้ว $m < n$
5. ถ้า $0 < a < 1$ จะได้ว่า
   1) ถ้า $a^m > a^n$ แล้ว $m < n$ 2) ถ้า $a^m < a^n$ แล้ว $m > n$

1.1 สมการและอสมการเอกซ์โปเนนเชียล

1. ในการแก้สมการเอกซ์โปเนนเชียล ใช้สมบัติของฟังก์ชัน 1 – 1 ที่ว่า $\boxed{a^x = a^m \Leftrightarrow x = m}$ และ
2. ในการแก้อสมการเอกซ์โปเนนเชียลใช้สมบัติของฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

2. ฟังก์ชันลอการิทึม

บทนิยาม ถ้า $a > 0$ และ $a \neq 1$ เรียกฟังก์ชัน $\{(x, y) \mid x = a^y\}$ ว่าฟังก์ชันลอการิทึม

นิยมเขียน $y = \log_a x$ แทน $x = a^y$

" $\log_a x$ " อ่านว่า ล็อกเอกซ์ฐานเอ

ดังนั้นอาจเขียนแทนฟังก์ชันลอการิทึมด้วย

$y = \log_a x \ , \ a > 0 \ , \ a \neq 1$

สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม

ถ้า $a > 0$ และ $a \neq 1$ $g = \{(x, y) \mid y = \log_a x\}$ มีสมบัติดังนี้

1. g เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 จาก R^+ ไปทั่วถึง R นั่นคือ
   1) $D_g = R^+$
   2) $R_g = R$
   3) $\log_a m = \log_a n$ ก็ต่อเมื่อ $m = n$ เมื่อ $m > 0$ และ $n > 0$
2. ถ้า $a > 1$ แล้ว g เป็นฟังก์ชันเพิ่ม นั่นคือ
   1) ถ้า $m > n > 0$ แล้ว $\log_a m > \log_a n$
   2) ถ้า $0 < m < n$ แล้ว $\log_a m < \log_a n$
3. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว g เป็นฟังก์ชันลด นั่นคือ
   1) ถ้า $m > n > 0$ แล้ว $\log_a m < \log_a n$
   2) ถ้า $0 < m < n$ แล้ว $\log_a m > \log_a n$
4. ถ้า $a > 1$ จะได้ว่า
   1) ถ้า $\log_a m > \log_a n$ แล้ว $m > n > 0$
   2) ถ้า $\log_a m < \log_a n$ แล้ว $0 < m < n$
5. ถ้า $0 < a < 1$ จะได้ว่า
   1) ถ้า $\log_a m > \log_a n$ แล้ว $0 < m < n$
   2) ถ้า $\log_a m < \log_a n$ แล้ว $m > n > 0$

สมบัติของลอการิทึมเพิ่มเติม

ให้ M, N เป็นจำนวนจริงบวก และ $a > 0$ และ $a \neq 1$

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a M^k = k \log_a M$
4. $\log_{a^k} M = \frac{1}{k} \log_a M$
5. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
6. $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
7. $a^{\log_a M} = M$
8. การเปลี่ยนฐานลอการิทึม ถ้า $x > 0$ และ $x \neq 1 ; a > 0 , b > 0$

    8.1 $\log_b a = \frac{\log_x a}{\log_x b}$

    8.2 $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, $a \neq 1$
9. เมื่อ $a > 0 , b > 0 ; M \neq 1 ; M > 0$

    $a^{\log_b M} = b^{\log_a M}$

2.1 ลอการิทึมสามัญ (Common Logarithm)

ลอการิทึมสามัญ หมายถึง ลอการิทึม ที่มีฐานสิบ

การเขียนลอการิทึมสามัญตกลงเขียนโดยไม่มีฐานกำกับ

เช่น $\log_{10} 2 = \log 2$

สำหรับ A ที่เป็นจำนวนบวกใดๆ สามารถเขียน A ในรูปมาตรฐาน

โดย $A = N_o \times 10^n \quad 1 \leq N_o < 10 ; n \in I$

$\therefore \quad \log A = \log N_o + \log 10^n$

$= \log N_o + n$

เรียก n ว่า แคแรกเทอริสติก (Characteristic) ของ $\log A$

เรียก $\log N_o$ ว่า แมนทิสซา (Mantissa) ของ $\log A$

ซึ่งแมนทิสซา ของ $\log A$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ

ข้อสังเกต 1. เมื่อกำหนดจำนวนจริง N จะมี A และ n ได้เพียงคู่เดียว ซึ่ง $N = A \times 10^n$, $1 \leq A < 10$ ดังนั้นแมนทิสซา และแคแรกเทอริสติกของ $\log N$ มีเพียงอย่างละ 1 จำนวน

2. แคแรกเทอริสติกของ $\log N$ เป็นจำนวนเต็ม
3. แมนทิสซาของ $\log N$ จะน้อยกว่า 1 และไม่เป็นจำนวนจริงลบ

2.2 ลอการิทึมธรรมชาติ หรือลอการิทึมแบบเนเปียร์ (Natural Logarithm)

ลอการิทึมธรรมชาติ หมายถึง ลอการิทึมที่มีฐาน e โดย e เป็นจำนวนอตรรกยะ e มีค่าประมาณ 2.71828

เขียน $\log_e x = \ln e$

2.3 แอนติลอการิทึม

แอนติลอการิทึม คือการดำเนินการที่ตรงข้ามกับการหาค่าลอการิทึม

โดย $\log x = A$ ก็ต่อเมื่อ $\text{antilog } A = x$

เช่น กำหนดให้ $\log 57.4 = 1.7589$

โดยนิยามของฟังก์ชันลอการิทึม

สามารถสรุปได้ว่า $57.4 = 10^{1.7589}$

หรือใช้การแอนติลอการิทึม

สามารถสรุปได้ว่า $57.4 = \text{anti log } 1.7589$

2.4 การคำนวณค่าโดยประมาณโดยใช้ลอการิทึม

ในหัวข้อนี้แม้จะใช้เครื่องหมายเท่ากับ แต่เป็นค่าประมาณทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 11 กำหนด $\log 275 = 2.4393$ ถ้า $\log N = -4.5607$ แล้ว N เท่ากับข้อใด

1. 2.75×10^{-4} 2. 2.75×10^{-5}
3. 2.75×10^{-3} 4. 2.75×10^{4}

เฉลยข้อ 2

วิธีทำ $\log N = -4.5607 = -4 - 0.5607$

$= (-4 - 1) + (1 - 0.5607) = -5 + 0.4393$

จากที่กำหนด $\log 275 = 2.4393$

จะได้ $\log 275 = 0.4393$

ดังนั้น $\log N = \log 10^{-5} + \log 2.75 = \log 2.75 \times 10^{-5}$

$N = 2.75 \times 10^{-5}$

2.5 สมการ ลอการิทึม

สามารถแก้ได้โดยอาศัยสมบัติของลอการิทึม และกระบวนการทางพีชคณิตจัดให้อยู่ในรูปใดรูปหนึ่งต่อไปนี้

1. $\log_a x = M$ ก็ต่อเมื่อ $x = a^M$

2. ใช้สมบัติของฟังก์ชัน ชนิด $1-1$ ที่ว่า $\log_a x = \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

3. เมื่อหาค่าตัวแปรได้แล้ว ต้องตรวจสอบว่าค่าที่ได้เป็นคำตอบของสมการหรือไม่ โดยการแทนค่าตัวแปรลงในสมการที่กำหนด

2.6 อสมการลอการิทึม

การแก้อสมการลอการิทึม อาจแปลงให้อยู่ในรูปอสมการเอกซ์โปเนนเชียลหรือใช้สมบัติต่อไปนี้

1) ถ้า $a > 1$

$$\log_a m > \log_a n \leftrightarrow m > n > 0$$

$$\log_a m < \log_a n \leftrightarrow 0 < m < n$$

2) ถ้า $0 < a < 1$

$$\log_a m > \log_a n \leftrightarrow 0 < m < n$$

$$\log_a m < \log_a n \leftrightarrow m > n > 0$$

ตัวอย่างข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย

ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

1. กำหนดกราฟของสมการ $y = 10^x$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. มีจุดตัดแกน y หนึ่งจุด

ข. เมื่อ x มีค่าเป็นลบ y มีค่าเป็นลบด้วย

ข้อใดต่อไปนี้ถูก (Ent. คณิต2 มีนาคม 2543)

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

2. ข้อใดต่อไปนี้ถูก (Ent. คณิตกข ปี 2531)

1. กราฟของ $y = 2^x$ และ $y = x^2$ ตัดกัน 1 จุดเท่านั้น
2. กราฟของ $y = \log|x|$ ตัดแกน x มากกว่า 1 ครั้ง
3. กราฟของ $y = 2^{|x|}$ และ $y = -3^{|x|} + 3$ ไม่ตัดกัน
4. กราฟของ $y = -\log(-x)$ เมื่อ $x < 0$ ไม่ตัดแกน x

3. ถ้า $-2 \le x \le 2$ และ $8 \le y \le 13$ แล้ว ค่ามากสุดของ $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1}{y + 2}$

เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต1 ตุลาคม 2544)

1. 1 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{3}$ 4. $\frac{1}{8}$

4. ฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันลด (Ent. คณิตกข ปี 2540)

1. $f(x) = (\sin 18^\circ)^{-2x}$ ทุกๆ x 2. $f(x) = (\cos 18^\circ)^{-2x}$ ทุกๆ x

3. $f(x) = |\log_2 \frac{1}{x}|$ ทุกๆ $x > 0$ 4. $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ ทุกๆ $x > 0$

5. เซตคำตอบของสมการ $4 \cdot 3^{2x} + 9 \cdot 2^{2x} = 13 \cdot 6^x$ เป็นสับเซตในข้อใดต่อไปนี้

(Ent. คณิต1 ตุลาคม 2544)

1. [– 4, 0] 2. [– 3, 1] 3. [– 2, 2] 4. [1, 3]

6. ถ้า x เป็นรากของสมการ $2^{3x-1} \cdot 6^{x} \cdot 25^{5x-1} = 75^{x}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด
(Ent. คณิต1 มีนาคม 2543)

7. ค่า x ที่สอดคล้องกับสมการ $6(2^{5x}) + 11(2^{3x}) - 3(2^{x}) = 2^{5x+1}$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้
(Ent. คณิตกข ปี 2533)

1. $\left[-2, -\frac{3}{4}\right]$
2. $\left(-\frac{3}{4}, 0\right]$
3. $\left(0, \frac{7}{8}\right]$
4. $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{2}\right]$

8. $\log_{10}\sqrt{28} - \log_{\frac{1}{10}}\sqrt{325} + \log_{\frac{1}{100}} 91$ มีค่าเท่าใด (Ent. คณิต1 มีนาคม 2542)

9. ค่าของ $\log_3(\log_2(\log_5 625))$ คือข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต2 มีนาคม 2543)

1. $\log_2 3$
2. $\frac{1}{\log_3 2}$
3. $\frac{\log 3}{\log 2}$
4. $\frac{\log 2}{\log 3}$

10. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \ldots \log_{(n+1)}(n+2) = 7$
แล้ว n มีค่าเท่ากับเท่าใด (Ent. คณิต2 มีนาคม 2544)

11. ถ้า $\ln(\log_2 3) - \ln(\log_4 3) - \ln(\log_5 4) - \ldots - \ln(\log_n(n-1)) = (10^{-\log 2})(\ln 36)$
แล้วค่าของ n คือข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตกข ปี 2531)

1. 12
2. 36
3. 64
4. ข้อ 1, 2 และ 3 ไม่มีข้อใดถูก

12. ถ้ากำหนดให้ $2\log_2 a - 3\log_2 b = 4$ และ
$3\log_2 a - 4\log_2 b = 6$ แล้ว $(a^{2b} + \log_{2a} b)^{\frac{1}{2}}$ มีค่าเท่าใด (Ent. คณิตกข ปี 2533)

13. เซตคำตอบของสมการ $\log_2(x^2 - x - 4)^2 = \log_{0.1}(0.01)$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใด
ต่อไปนี้ (Ent. คณิต1 ตุลาคม 2541)

1. $R - [-2, 2]$
2. $R - [-1, 3]$
3. $[-4, 2]$
4. $[-3, 3]$

14. เซตคำตอบของสมการ $\log_9 3^{(x^2+3x-30)} = x$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตกข ปี 2541)

1. $(-11, 0)$ 2. $(0, 8)$

3. $(-11, 5)$ 4. $(-7, 7)$

15. ผลบวกของรากของสมการ $2\log_3 x - 2\log_{x^2} 9 + 3 = 0$ มีค่าใกล้เคียงข้อใดมากที่สุด (Ent. คณิตกข ปี 2540)

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

16. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\left(\sqrt{1+\log_x \sqrt{27}}\right)\log_3 x + 1 = 0$
จำนวนสมาชิกของ A มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต2 ตุลาคม 2543)

1. 0 2. 1

3. 2 4. 3

17. x ที่สอดคล้องสมการ $\frac{\log 2x}{\log 3} + \log_3(x-12) = \log_{\sqrt{3}}[\sqrt{x}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5})]$
มีค่าเท่ากับเท่าใด (Ent. คณิต1 มีนาคม 2545)

18. กำหนดให้ a , b เป็นคำตอบของสมการ $\log_3 x + 6\log_x 3 = 5$ โดยที่ $a < b$
ถ้า $A = \{x \in I^+ \mid x \in [a, b]$ และ $3 \mid x\}$
เมื่อ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก แล้ว A มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
(Ent. คณิต1 ตุลาคม 2542)

1. 6 2. 7 3. 18 4. 19

19. กำหนดให้ $\log_8(\log_4(\log_2 x)) = 2$ ถ้า $x = 4^{(2^n)}$ แล้ว n มีค่าเท่ากับเท่าใด (Ent. คณิต1 ตุลาคม 2545)

20. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $\log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \left[\sqrt[3]{\frac{1}{x^2-3x+4}}\right] = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต กข ปี 2541)

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

21. กำหนดให้ a และ b เป็นรากทั้งหมดของสมการ $\log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{6}} \left[\sqrt{\frac{1}{x^2 - x + 4}}\right] = 0$ โดยที่ $a < b$

ถ้า $f(x) = b^{ax}$ ทุกจำนวนจริง x

$g(x) = \log_{b-a} x$ ทุกจำนวนจริง x

แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง (Ent. คณิต กข ปี 2533)

1. f และ g เป็นฟังก์ชันเพิ่มทั้งคู่
2. f และ g เป็นฟังก์ชันลดทั้งคู่
3. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและ g เป็นฟังก์ชันลด
4. f เป็นฟังก์ชันลด และ g เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

22. ถ้า a เป็นผลบวกของคำตอบของสมการ $2^{2x+1} - 17(2^x) = -8$

แล้ว $\log_a(8)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต2 ตุลาคม 2543)

1. -3
2. -1
3. 1
4. 3

23. ถ้า a , b เป็นคำตอบของสมการ $6^x - 3^{x+1} - 2^{x+2} + 12 = 0$

แล้วคำตอบของสมการ $(ab)^{2x+1} = (ab+3)^x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต1 ตุลาคม 2546)

1) $\frac{\log 3}{\log 2 - \log 3}$
2) $\frac{\log 4}{\log 7 - \log 16}$
3) $\frac{1}{\log_5 8 - 2}$
4) $\frac{1}{\log_2 5 - 2}$

24. คำตอบของสมการ $2^{2x+1} - 3^2 \cdot 2^{x-1} + 1 = 0$ จะตรงกับคำตอบของสมการในข้อใด

(Ent. คณิต กข ปี 2529)

1. $\log_4 \log_3 \log_2 (3x^2 - 4) = 0$
2. $\log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \left[\sqrt[3]{\frac{1}{2x^2 - x + 1}}\right] = 0$
3. $3^{2x-3} + 2 \cdot 3^{x-2} - 1 = 0$
4. $\left(\left((3x-2)^2\right)^{\frac{1}{3}} \left(\left((x+1)^{\frac{1}{3}}\right)^2\right)^3\right)^{\frac{1}{2}} - 2 = 0$

25. กำหนดให้ $f = \{(x, y) \mid y = \log(x+1) + \log(x+2) - \log(4 - x^2)\}$

และ $g = \{(x, y) \mid y = 2^{x-1}$ และ $x \geq 0\}$

ถ้า $D_f =$ โดเมนของ f และ $R_g =$ เรนจ์ของ g แล้ว $D_f \cap R_g$ เป็นสับเซตของเซตใดข้อใด

ต่อไปนี้ (Ent. คณิต1 ตุลาคม 2541)

1. [0, 1.5)
2. [0.5, 2.5)
3. [1, 3)
4. [1.5, 4)

26. ให้ช่วงเปิด (a, b) เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log(3x + 4) > \log(x - 1) + 1$
แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (Ent. คณิต1 ตุลาคม 2544)

27. ให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log_{16}x + \log_4 x + \log_2 x < 7$
และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $3^{4x-3} - 26(3^{2x-3}) \geq 1$ แล้ว $A - B$ คือช่วงในข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต1 ตุลาคม 2545)

1. $(0, \frac{3}{2})$
2. $[\frac{3}{2}, 16)$
3. $(0, 3]$
4. $[3, 16)$

28. ถ้า $0 < x <$ แล้ว เซตคำตอบของ $\log_{0.5}(\sin x) + \log_{0.5}(\sin 2x) < \log_{0.5}(\cos x) + \log_{0.5}(\cos 2x)$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต1 ตุลาคม 2544)

1. ϕ
2. $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$
3. $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right)$
4. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$

29. กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log_x\left(\frac{x+3}{x-1}\right) \geq 1$ และ $T = \left\{\log_{\sqrt{3}} x \mid x \in s\right\}$ เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต1 ตุลาคม 2546)

1. $[0, 2]$
2. $[1, 3]$
3. $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$
4. $\left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$

เฉลยคำตอบ

1) 2	2) 2	3) 2	4) 4	5) 3	6) 0.25
7) 1	8) 1	9) 4	10) 126	11) 3	12) 4
13) 4	14) 4	15) 2	16) 2	17) 13	18) 2
19) 127	20) 3	21) 4	22) 4	23) 4	24) 4
25) 2	26) 3	27) 1	28) 4	29) 1	